Die Tabellen dazu sind:

Math U. 17 m infol

Doch zweifle ich noch, ob
sie wirklich die rechten sind.

Math Un 440-1

Mathesis. Systemata & methodi
143.

R

Die Elemente der Mathematik in sechs Büchern

von

Johann Friedrich Lorenz

Erster Theil
die
Arithmetik, Geometrie und Analysis.

Leipzig
im Verlag der J. G. Müllerschen Buchhandlung
1785.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Vorrede.

Die Mathematik, welche von jeher die erste unter den Wissenschaften gewesen, und deren Werth zu allen Zeiten anerkannt worden ist, gewährt nicht nur Kenntnisse, die man nicht ohne Nutzen und Vergnügen erlernt, und in denen Niemand, der auf Stand und Erziehung Anspruch macht, ein völliger Fremdling seyn darf; sondern ist auch wegen ihrer vorzüglichen Methode Jedem, dem es um Bildung des Verstandes zu thun ist, nicht genugsam zu empfehlen. Insbesondre ist, wie mich dünkt, der ihr eigene Gang, den sie in Entwickelung ihrer Lehren nimmt, an ihr zu rühmen; indem sie nicht nur mit den gemeinsten und einfachsten Sätzen den Anfang macht, immer allmälig zu zusammengesetztern Wahrheiten fortschreitet, und zuletzt von Dingen, die alle Kräfte des menschlichen Verstandes zu übersteigen

schienen, befriedigende Aufschlüsse giebt; sondern auch überhaupt sich mit einer mäßigen Anzahl von völlig festgesetzten Grundlehren begnügt, auf deren Anwendung alle noch so schwere Untersuchungen, die sie anstellt, sich einschränken. Diese Grundlehren, die man unter dem Namen der Elemente begreift, machen demnach bey ihr die Hauptsache aus, so daß der, welcher sich solche recht zu eigen gemacht hat, keines weitern Unterrichts bedarf, um in das verborgenste seiner Wissenschaft einzudringen. Wie sehr man auch zu allen Zeiten bemühet gewesen sey, diese Elemente auf das sorgfältigste zu bearbeiten, das beweisen die Schriften der alten und neuen Mathematiker, welche sich hiedurch um ihre Wissenschaft Verdienste erworben haben. Diesen nicht sowohl nachzueifern, denn hiezu fühle ich meine Kräfte zu schwach, als vielmehr durch eine vorläufige Zubereitung ihnen geschickte Schüler zuzuführen, war die Absicht, in welcher ich die Elemente der Mathematik nach einem Plan auszuführen unternommen habe, der meines Bedünkens das Studium einer so vorzüglichen Wissenschaft Anfängern zu erleichtern geschickt ist. Freylich verstehe ich durch diese Erleichterung kein Zusammenstoppeln seichter, durch und durch mangelhafter Kenntnisse, die in keiner Wissenschaft, am wenigsten in der Mathematik, wo strenge Methode die einzige Methode ist, Nutzen bringen; sondern eine sorgfältige Wahl der Grundwahrheiten, eine genaue Anordnung des Ganzen und der Theile,

einen bestimmten Ausdruck der einzelnen Sätze, und eine Entwickelung der Beweise, die solche durch kürzern Vortrag nur desto einleuchtender macht. Daß nur hierauf jede Erleichterung gehen müsse, werden mir die, welche die Mathematik kennen, und überhaupt alle, welche wissen, was zur Würde einer Wissenschaft gehört, gern zugeben; aber ein Punkt ist noch übrig, der zweifelhaft seyn könnte, und den ich nicht verschweigen darf, da ich unter zweyen Wegen, die ich gehen konnte, einen erwählen mußte. Es ist nämlich die Frage: ob man Anfängern die trockenen Lehren vorlegen, oder deren Vortrag mit nutzbaren Anwendungen verweben solle; und durch welches von beyden das Studium der Wissenschaft am meisten erleichtert werde. Die **eine** Parthey stimmt für die unmittelbare Anwendung eines jeden Satzes; theils weil den Lehrling natürlicher Weise zu wissen verlange, wozu das was er lernen soll nützlich sey; theils weil der Satz selbst durch seine Anwendung in mehreres Licht gesetzt werde; theils weil der Vortrag durch die specielle Behandlung viel von seiner Trockenheit verliere, und durch die Mannichfaltigkeit der Sachen an Lebhaftigkeit und Interesse gewinne. Die **andere** Parthey fodert eine gedrängte Behandlung der Lehren und Vorschriften, die nur durch wenige, aber ausgesuchte Beyspiele erläutert werden, und verspart die Anwendung der abstracten Lehren für die im Folgenden häufig vorkommenden Gelegenheiten, wo erst ein

rechter Gebrauch davon zu machen ist. Ich getraue mir zwar nicht, zwischen diesen Partheyen zu entscheiden; aber das dünkt mich doch, daß man bey letzterer wichtigere Vortheile gewinnen, und der Natur der Sache viel näher kommen könne. Denn wird nur das, was zur Hauptsache gehört, ohne fremde Einmischung gesagt, und daher in einen engern Raum zusammengebracht: so wird nicht nur die Aufmerksamkelt des Lehrlings auf die Sache allein geheftet, sondern auch die Uebersicht des Ganzen, und der Gebrauch des Erlernten, um ein Großes erleichtert. Hiezu kommt noch, welches vorzüglich zu bedenken ist, daß frühzeitige Anwendungen schwieriger sind, als es vielen, denen nicht alles dazu erforderliche bekannt ist, zu seyn scheint. Und überhaupt genommen, glaube man, einem nicht gar seltenen Vorurtheile nach, ja nicht, daß man dem Abstracten durch das Individuellere sehr zu Hülfe kommen könne. Denn die Absicht aller unserer Abstractionen, die zu den nothwendigen Unvollkommenheiten endlicher Geister gehören, ist ja, die möglich-wenigsten Ideen zusammenzustellen, um unserm eingeschränkten Blicke zu statten zu kommen; da jeder Lehrsatz und jede Aufgabe um desto schwerer zu übersehen ist, je mehrere besondre Bestimmungen darein verwebt sind. Die Erlernung abstracter Regeln ist daher nicht das Schwere der Wissenschaft, welches man zu überwinden hat; sondern die Anwendung dieser Regeln ist es, wozu mehr Kenntniß, mehr Uebung,

und mehr Kopf erfodert wird, als man beym ersten Anfange der Erlernung voraussetzen kann. Dieses wird mich hoffentlich rechtfertigen, daß ich bey meinem Plane nicht diejenigen Lehrlinge vor Augen gehabt, welche nur für specielle Absichten die Mathematik erlernen, und sich auch nur auf einen besondern Theil derselben einschränken wollen, welche daher zur frühesten Anwendung des wenigen eilen, was sie nun etwa wissen, so mangelhaft solche auch seyn mag; sondern mich vielmehr nach dem bessern Theile gerichtet habe, welcher das Ganze zu umfassen strebt, und nicht eher Anwendungen verlangt, als bis solche in ihrer Vollkommenheit gemacht werden können. Auch konnte es mir an solchen Anwendungen, jede an dem ihr zugehörigen Orte, nicht fehlen, da die Wissenschaft, die ich zu bearbeiten hatte, von einem so weiten Umfange, und von so reichen und mannichfaltigen Inhalte ist, auch alle ihre Theile solche Beziehungen auf einander haben, daß der eine der Hülfe des andern nicht entbehren kann. In Rücksicht auf diese Beziehungen trage ich die gesammte Mathematik in sechs Büchern vor, welche der **Arithmetik**, die **Geometrie**, die **Analysis**, die **mechanischen**, die **optischen**, und die **astronomischen** Wissenschaften abhandeln. Mein Vorsatz war Anfangs, alle sechs Bücher auf einmal zu liefern; aber mancherley Ursachen nöthigten mich, nur die drey ersten in einem Theile zusammenzufassen, und die drey letzten für einen zweyten

Theil, welcher aufs späteste nächstkünftige Ostermesse erscheinen, und den ersten an Bogenzahl wenigstens nicht übertreffen wird, zu bestimmen. Voritzt habe ich also blos von der Einrichtung des ersten Theils noch kürzlich Rechenschaft zu geben. Das **erste** Buch enthält die **gemeine** und **allgemeine** Arithmetik. Bey **jener** setze ich das Mechanische der gemeinsten Rechnungsarten zum voraus; weil man meines Bedünkens von der Mathematik nichts weiter fodern kann, als daß sie bey den gemeinsten Rechnungen nur die Gründe des Verfahrens angebe; **diese** habe ich von der Algebra getrennt, weil vielen, die wohl keine Algebraisten werden möchten, es doch äußerst nützlich ist, die Buchstaben-Formeln, welche in allen neuern mathematischen Schriften vorkommen, und welche zur Erleichterung der Beweise und Abkürzung des Vortrags ungemein dienlich sind, zu verstehen; und weil insbesondere die wichtige Lehre von den Proportionen, Progreßionen und Logarithmen, durch dieses Hülfsmittel um ein Großes erleichtert werden konnte; in **beyden** habe ich mit Herrn **Euler** den Begriff der Rechnungsarten, oder sogenannten Species, allgemeiner gefaßt, so daß die Erhebung zu Potenzen, die Extrahirung der Wurzeln, und die logarithmischen Rechnungen mit dazu gezählt werden müssen. Das zweyte Buch begreift die **reine** und die **gemischte Geometrie**. Denn ich fand es für die Methode sowohl, als für die Sache selbst vortheilhaft, den

für

für sich bestehenden und keiner fremden Principien bedürfenden, von dem mit Arithmetik gemischten, Theil der Geometrie, nach dem Beyspiele großer Vorgänger abzusondern. Zu dieser Absonderung hatte ich noch den besondern Grund, daß ich den Gedanken, mit dem ich mich schon lange beschäftigt habe, bey dieser Gelegenheit in Ausführung bringen wolte: die Geometrie des Euklides der neuern Mathematik ganz einzuverleiben. Solte ich in diesem Versuche so glücklich gewesen seyn, als ich es zu werden bemüht gewesen bin: so schmeichle ich mir, den Anfängern keinen geringen Dienst hiedurch geleistet zu haben, und hoffe, daß solches zugleich bey vielen die Lust erwecken werde, dieses unschätzbare Denkmal des Alterthums in seinem ganzen Umfange zu studiren, wozu ihnen auch durch die vor einigen Jahren von mir herausgegebene deutsche Uebersetzung der Elemente des Euklides vielleicht bequemere Gelegenheit verschaft worden ist. Das dritte Buch umfaßt die Analysis sowohl des Endlichen, als des Unendlichen; wobey ich in Absicht des erstern es für rathsam hielt, den allgemeinen und den geometrischen Calculus von einander abzusondern, und daher drey besondere Abschnitte zu machen. Da in diesem Theile der Mathematik, der in vielen Stücken noch neu ist, die Begriffe, die man mit den Wörtern Analysis, Algebra, allgemeine Arithmetik, höhere Mathematik, verbinden soll, nicht übereinstimmig angegeben werden, und die

Grenzen dieser Wissenschaften nicht allgemein festgesetzt sind: so mußte ich bemühet seyn, die Grenzlinien wenigstens so zu ziehen, als ich glaubte, daß sie Anfängern am besten einleuchten würden. Diese **drey** Bücher fassen demnach die Elemente dessen, was man unter den Namen der **reinen** oder **abstracten Mathematik** begreift, im kurzen und doch dabey vollständig in sich; wenn man anders nicht dies für einen Mangel hält, daß ich manche Lehren unberührt, oder doch unausgeführt gelassen, welche freylich an sich von ungemeiner Brauchbarkeit in der ganzen Mathematik sind. Ich rechne dahin besonders den trigonometrischen Calculus, die Lehre von den Permutationen und Combinationen, die binomische Regel, die Theorie von den Wurzeln der Gleichungen, die Behandlung und den Gebrauch der unendlichen Reihen, die neuere Berechnungsart der Logarithmen, und was sonst noch von Erheblichkeit übrig seyn mag. Aber meines Erachtens muß man Anfänger nicht allzusehr überhäufen, und ihnen den ersten Cursus nicht ohne Noth erschweren; jedoch es ihnen zugleich fühlbar zu machen suchen, wie vieles ihrer Wißbegierde würdiges noch übrig sey, zu dessen Erlernung sie zubereitet worden; auch ist mein Vorsatz, durch künftige **Beyträge** zu diesen Elementen, den wißbegierigen Schülern der Mathematik in Erweiterung der erlangten Kenntnisse behülflich zu seyn. Für diejenigen, welche bey ihrem mathematischen Studium nur eingeschränkte

Absich-

Absichten haben, enthalten diese Elemente viel mehr, als sie verlangen; sind aber auch so eingerichtet, daß eine beliebige Auswahl für dergleichen Lehrlinge gar füglich gemacht werden kann. So kann z. B. das ganze dritte Buch übergangen, oder solches auf die beyden ersten, ja wenn man will auch nur auf den ersten Abschnitt eingeschränkt werden. Aus dem ersten Buche kann man blos den ersten Abschnitt ausheben, und in dem zweyten Abschnitte sich mit dem ersten Kapitel wenn man will begnügen; ja selbst in der gemeinen Arithmetik kann man so verschiedene Cursus machen, als Kapitel darinn enthalten sind. Noch mannichfaltiger läßt sich vom zweyten Buche Gebrauch machen, da man z. B. das mathematische Studium gleich mit der Geometrie anfangen kann, ohne Arithmetik vorauszuschicken, welche erst alsdenn nöthig wird, wenn man auf die Lehre von der Aehnlichkeit kommt; so wie sich auch für diejenigen, denen es nur um historische Erkenntniß und Praxis zu thun ist, die Sätze von den Demonstrationen absondern lassen. Für alle dergleichen eingeschränkte Absichten, die so mannichfaltig seyn können, eben so viel besondere Lehrbücher zu verfassen, würde etwas sehr überflüßiges seyn, da ein einziges allen zusammen, und jedem insbesondere ein Genüge leisten kann; nicht zu gedenken, daß oft mancher dadurch Lust bekömmt, allmälig weiter zu gehen, als er anfangs gesonnen war.

Zum

Zum Beschluß dieser Vorrede kann ich nicht umhin, zur Ehre der Verlagshandlung öffentlich zu rühmen, daß solche nichts verabsäumet, um dieses Werk correct und mit aller typographischen Genauigkeit zu liefern, welche sich von der Breitkopfischen Druckerey erwarten läßt. Geschrieben zu Closter Berge bey Magdeburg in der Ostermesse 1785.

Johann Friedrich Lorenz.

Allge=

Allgemeiner Entwurf des ersten Theils.

Erstes Buch: Elemente der Arithmetik.

I. Die gemeine Arithmetik.

1. Von den ganzen Zahlen. S. 3
2. Von den Brüchen. 23
3. Von den Proportionen 37

II. Die allgemeine Arithmetik.

1. Von der Buchstabenrechnung 43
2. Von den Zahlensystemen 68
3. Von den Proportionen. 76
4. Von den Progreßionen. 93
5. Von den Logarithmen. 102

Zweytes Buch: Elemente der Geometrie.

I. Die reine Geometrie.

1. Von den ebenen Figuren. 125
2. Von den körperlichen Figuren. 197

II. Die gemischte Geometrie.

1. Von der Ausmessung der Größen. 227
2. Von der Berechnung ebener Triangel 253
3. Von der Berechnung körperlicher Triangel. 265

Drittes Buch: Elemente der Analysis.

I. Die gemeine Analysis, oder die Algebra.

1. Von den bestimmten Aufgaben. 287
2. Von den unbestimmten Aufgaben 307

II. Die analytische Geometrie.

1. Von den bestimmten Aufgaben. 317
2. Von den unbestimmten Aufgaben. 334

III. Die höhere Analysis.

1. Von der Differentialrechnung. 369
2. Von der Integralrechnung. 396

Specieller Entwurf des ersten Theils.

I. Die gemeine Arithmetik.

I. Von den ganzen Zahlen.

1. Numeration 3
2. Addition. 5
3. Subtraction. 6

4. Mul-

4. Multiplication. 6
5. Division. 8
6. Maaß der Zahlen. 10
7. Potenzen und Wurzeln 14
8. Begrif der Rechnungsarten. 18
9. Grundsätze der ganzen Mathematik 20

II. Von den Brüchen.
1. Natur der Brüche. 23
2. Aufheben der Brüche. 27
3. Gleichnamige Brüche. 27
4. Addition der Brüche. 30
5. Subtraction der Brüche. 31
6. Multiplication der Brüche. 32
7. Division der Brüche. 33
8. Potenzen und Wurzeln der Brüche. 35

III. Von den Proportionen.
1. Erklärungen. 37
2. Lehrsätze. 38
3. Aufgaben. 40

II. Die allgemeine Arithmetik.

I. Von der Buchstabenrechnung.
1. Allgemeine Bezeichnung der Größen. 43
2. Natur entgegengesetzter Größen. 50
3. Allgemeine Addition. 51
4. Allgemeine Subtraction 52
5. Allgemeine Multiplication 54
6. Allgemeine Division. 56
7. Allgemeines Potenziren. 59
8. Allgemeines Extrahiren 62
9. Irrationalgrößen 63
10. Unmögliche oder eingebildete Größen. 66

II. Von den Zahlensystemen.
1. Natur der Zahlensysteme. 68
2. Decadisches Zahlensystem. 69
3. Sexagesimalsystem. 74

III. Von den Proportionen.
1. Natur der Proportion. 76
2. Natur der arithmetischen Proportion. 77
3. Natur der geometrischen Proportion. 79

4. Zusam-

4. Zusammensetzung geometrischer Proportionen. S. 82
5. Practische Rechnungsregeln. 86

IV. Von den Progreßionen.
1. Natur der arithmetischen Progreßion. 93
2. Summe einer arithmetischen Progreßion. 94
3. Natur der geometrischen Progreßion. 96
4. Summe einer geometrischen Progreßion. 98

V. Von den Logarithmen.
1. Natur der Logarithmen. 102
2. Die logarithmischen Tafeln. 107
3. Gebrauch der Logarithmen. 114

III. Die reine Geometrie.

I. Von den ebenen Figuren, oder die Planimetrie.
1. Erste Begriffe von Figuren. 125
2. Lehre von den Triangeln. 130
3. Lehre von den Parallellinien. 142
4. Verwandlung geradlinichter Figuren. 148
5. Lehre von dem Cirkel. 154
6. Geradlinichte Figuren am Cirkel. 168
7. Aehnlichkeit geradlinichter Figuren. 173
8. Proportionen beym Cirkel. 189

II. Von den körperlichen Figuren, oder die Stereometrie.
1. Lage der Ebenen. 197
2. Prismatische Körper. 206
3. Körper die nicht prismatisch sind. 218

IV. Die gemischte Geometrie.

I. Von der Ausmessung der Größen.
1. Ausmessung der Linien und Winkel. 227
2. Ausmessung der Flächen. 233
3. Ausmessung der Körper. 242

II. Von der Berechnung ebener Triangel, oder die ebene Trigonometrie.
1. Natur der trigonometrischen Linien. 253
2. Lehren zur Berechnung ebener Triangel. 260
3. Aufgaben für die Berechnung ebener Triangel. 263

III. Von der Berechnung körperlicher Triangel, oder die sphärische Trigonometrie.
1. Natur der sphärischen Triangel. 265

2. Be-

2. Berechnung rechtwinklichter sphär. Triangel S. 268
3. Berechnung schiefwinklichter sphär. Triangel. 275

V. Die gemeine Analysis, oder die Algebra.

I. Von den bestimmten Aufgaben.

1. Form der Gleichungen. 287
2. Reine Gleichungen. 299
3. Gemischte quadratische Gleichungen. 304

II. Von den unbestimmten Aufgaben.

1. Natur der unbestimmten Aufgaben. 307
2. Einfache unbestimmte Aufgaben. 310
3. Zusammengesetzte unbestimmte Aufgaben. 313

VI. Die analytische Geometrie.

I. Von den bestimmten Aufgaben.

1. Grundlehren. 317
2. Einfache Gleichungen. 323
3. Quadratische Gleichungen. 329

II. Von den unbestimmten Aufgaben.

1. Grundlehren. 334
2. Ableitung der Functionen aus den Linien. 341
3. Ableitung der Linien aus den Functionen. 347
4. Allgemeine Betrachtung der Linien. 364

VII. Die höhere Analysis, oder die Analysis des Unendlichen.

I. Von der Differentialrechnung.

1. Natur der Differentiale. 369
2. Differentiirung gemeiner Größen. 377
3. Differentiirung der Exponentialgrößen. 383
4. Gebrauch der Differentiale. 387

II. Von der Integralrechnung.

1. Natur der Integrale. 396
2. Integrirung gemeiner Differentiale. 401
3. Integrirung der Exponential-Differentiale. 411
4. Gebrauch der Integrale. 414

Erstes

Erstes Buch.

Elemente der Arithmetik.

1. Die gemeine Arithmetik.

2. Die allgemeine Arithmetik.

Erster Abschnitt.

Die gemeine Arithmetik.

1. Von den ganzen Zahlen.
2. Von den Brüchen.
3. Von den Proportionen.

Erstes Kapitel.

Von den ganzen Zahlen.

I. Numeration.

§. 1.

Wenn man Dinge zählt, so sieht man sie für gleich an, und nennt jedes derselben Eins, oder die Einheit. Eine Zahl ist ein Vielfaches der Einheit, oder ist aus Einheiten zusammengesetzt. Ziffern sind besondere Zeichen der Zahlen. Eine ganze Zahl heißt, deren Einheit das Ganze ist; eine gebrochene Zahl aber, oder ein Bruch, deren Einheit ein bestimmter Theil des Ganzen ist. Eine Zahl, deren Einheiten durch ihren Namen bestimmt sind, heißt eine benannte Zahl; ist die Art der Einheiten aber unbestimmt, so heißt die Zahl unbenannt.

§. 2.

In einer Reihe neben einander gesetzter Ziffern steigt ihr Werth von der Rechten gegen die Linke, so daß zehn Einheiten einer vorhergehenden Ziffer eine Einheit der nächstfolgenden ausmachen, das heißt, daß die Einheiten jeder folgenden Ziffer zehnmal grösser sind, als die Einheiten der nächst vorhergehenden. Sind daher die Einheiten der letzten Ziffer zur Rechten einfache oder **primitive Einheiten**: so sind die Einheiten der übrigen zusammengesetzte, oder **Einheiten höherer Ordnungen**; nämlich der ersten, zweyten, dritten u. s. w. so wie die Ziffern nach den primitiven Einheiten auf einander folgen.

§. 3.

Die primitiven Einheiten heißen **Einer**; die Einheiten der ersten höhern Ordnung, **Zehner**; der zweyten, **Hunderte**; der dritten, **Tausende**; der vierten, **Zehntausende**; der fünften, **Hunderttausende**; der sechsten, **Tausendtausende**, oder kürzer, **Millionen**.

§. 4.

Zählt man auf eben die Art, wie man die Einer gezählt hat, nun auch die Millionen: so kommen in der zwölften höhern Ordnung **Tausendtausende von Millionen**, oder kürzer, **Billionen**. Auf gleiche Art erhält man in der achtzehnten höhern Ordnung **Trillionen**; in der vier und zwanzigsten **Quadrillionen**; in der dreyßigsten **Quintillionen** u. s. w.

§. 5.

Die unbesetzten Stellen in einer solchen Reihe werden mit einer **Null** bezeichnet, welche also den Mangel der Einheiten bedeutet, und zugleich dient, die Einheiten und Zahlen verschiedener Ordnungen

von

von einander zu unterscheiden; auch Einheiten und Zahlen in verschiedene Ordnungen zu versetzen.

Zusatz. Statt einer Ziffer Nullen anzuhängen, kann man auch die Anzahl der Nullen über die Ziffer setzen. Z. E. 5000, oder $\overset{3}{5}$, heißt, Einheiten aus der dritten höhern Ordnung, oder aus der Klasse der Tausende.

II. Addition.

§. 6.

Zahlen addiren heißt eine Zahl finden, welche den gegebenen zusammen gleich ist. Die gefundene Zahl heißt die Summe; die gegebnen aber heißen die summirenden Zahlen.

§. 7.

Man findet die Summe, wenn man die gegebnen Zahlen mit ihren gleichförmigen Einheiten unter einander setzt, und solche von der Rechten an so zusammenzählt, daß jedesmal für zehn Einheiten einer jeden Ordnung eine Einheit zur nächstfolgenden Ordnung hinzukomme.

§. 8.

Auf eben die Art werden auch benannte Zahlen, als Geldsorten, Gewichte, Maaße, und dergleichen, addirt, daß man die Größen von einerley Art zusammenzählt; nur muß man jedesmal wissen, wie viel Einheiten einer niedrern Klasse eine Einheit der nächsthöhern ausmachen.

III. Subtraction.

§. 9.

Zahlen subtrahiren heißt eine Zahl finden, welche den Ueberschuß der größern über der kleinern anzeigt, und daher mit der kleinern zusammen der größern gleich ist. Die gefundene Zahl heißt der Rest, oder die Differenz; von den gegebenen Zahlen aber die größere der Minuendus, die kleinere der Subtrahendus.

§. 10.

Um den Rest zu finden, setze man die Einheiten der kleinern Zahl unter die gleichförmigen Einheiten der größern, nehme von der Rechten an jene von diesen hinweg, und bemerke den jedesmaligen Rest. Kommt dabey eine Ordnung vor, worinn die obere Ziffer kleiner als die untere ist: so giebt eine Einheit, um welche man die obere Ziffer vermindert, zehn Einheiten der nächst vorhergehenden.

§. 11.

Nach eben der Regel werden auch benannte Zahlen subtrahirt, wenn man die Größen einerley Art von einander wegnimmt; nur muß man dabey wissen, wenn man eine höhere Klasse um eine Einheit zu vermindern hat, wie viel Einheiten zur nächst vorhergehenden Klasse dafür hinzu kommen.

IV. Multiplication.

§. 12.

Zahlen multipliciren heißt die eine Zahl so vielmal zu sich selbst addiren, als die andre Einheiten enthält. Die daher entstehende Summe, in welcher

jede

jede der gegebenen Zahlen so vielmal enthalten ist, als die Einheit in der andern, heißt das Product oder Factum; die gegebenen Zahlen aber heißen Factoren, und zwar diejenige, welche addirt wird, der Multiplicandus, diejenige aber, welche anzeigt, wie vielmal jene addirt werden soll, der Multiplicator oder Multiplicans.

Zusatz. Sind drey Factoren gegeben: so soll das Product von zwey derselben mit dem dritten multiplicirt werden. Dies erklärt zugleich den Fall für vier und mehrere Factoren.

§. 13.

Um das jedesmalige Product zu finden, unterscheide man folgende Fälle:

Ist der Multiplicans eine einfache Ziffer und aus der Klasse der Einer: so setze man den Multiplicandus so vielmal, als der Multiplicans Einheiten enthält, unter einander, und mache die Summe. §. 7. Diese Operation aber wird durch die Pythagorische Tafel (das sogenannte Einmaleins) welche in der ersten Reihe das einfache, in der zweyten das zweyfache und so weiter das drey- vier- fünf- sechs- sieben- acht- und neunfache aller neun Ziffern enthält, sehr abgekürzt.

Ist der Multiplicans eine einfache Ziffer, aber aus einer der höhern Ordnungen, z. E. 300: so sehe man ihn als ein Product der Ziffer in die Einheit der höhern Ordnung an, z. E. 300 = 3. 100, suche das Product der einfachen Ziffer in den Multiplicandus, und erhebe dasselbe in die höhere Ordnung. §. 5.

Ist der Multiplicans aus mehrern Ziffern zusammengesetzt: so suche man die einzelnen Producte aus den einzelnen Theilen des Multiplicans in den Multiplicandus, und bringe solche in eine Summe.

Zusatz. Daß einerley Factoren, man mag ihre Ordnung ändern wie man will, einerley Product geben, erhellet für einfache Factoren aus der Pythagorischen Tafel; und gilt folglich auch für zusammengesetzte.

§. 14.

Eine benannte Zahl kann nicht mit einer benannten, sondern nur mit einer unbenannten Zahl multiplicirt werden; weil die Multiplication bey dem Multiplicans nur auf die Zahl seiner Einheiten, nicht aber auf deren Namen siehet. Das daher entstehende Product ist mit dem Multiplicandus von gleichem Namen. Die Art der Operation bey zusammengesetzten Zahlen folgt §. 19.

V. Division.

§. 15.

Zahlen dividiren heißt die kleinere Zahl von der größern so vielmal subtrahiren, bis gar kein, oder ein solcher Rest bleibt, der kleiner ist, als die gegebene kleinere Zahl. Die Zahl, welche anzeigt, wie vielmal die Subtraction geschehen, oder, wie vielmal die kleinere Zahl in der größern enthalten ist, heißt der Quotient; von den gegebenen Zahlen aber die größere der Dividendus, und der kleinere der Divisor.

Zusatz. 1. Bleibt hiebey kein Rest, so ist der Dividendus ein Product, dessen Factoren der Divisor und Quotient sind; und bleibt ein Rest, so gilt vom Dividendus, nachdem solcher Rest von ihm subtrahirt worden, eben dasselbe.

2. Daher ist im Dividendus nicht nur der Divisor so vielmal enthalten, als die Einheit im Quotienten; sondern auch der Quotient so vielmal, als die Einheit im Divisor.

3. Dem-

3. Demnach kann man die Division als eine zweyfache Art der Eintheilung ansehen, so daß der Divisor anzeigt, entweder in wie viel Theile der Dividendus zu theilen sey, oder wie groß jeder Theil des Dividendus seyn solle. Im ersten Falle zeigt der Quotient die Größe, im zweyten die Anzahl dieser Theile.

§. 16.

Um den Quotienten zu finden, subtrahire man entweder den einfachen Divisor, oder kürzer, ein Vielfaches des Divisors vom Dividendus, wiederhole solches mit dem Reste so lange es angehet, und bemerke jedesmal solches Vielfache.

Vergleicht man hiezu durch Hülfe der Pythagorischen Tafel die höchste Ziffer des Divisors mit der höchsten Ziffer des Dividendus, und sucht eine Zahl, welche in den Divisor multiplicirt ein Product giebt, welches sich von einem gleichen oder zunächst größern Theil des Dividendus subtrahiren läßt: so giebt die gefundene Zahl die höchste Ziffer des gesuchten Quotienten.

Wiederholt man diese Operation mit jeder folgenden Ziffer des Dividendus, zu welcher man den etwannigen Rest geschlagen hat: so erhält man nach und nach die übrigen Ziffern des Quotienten.

§. 17.

Eine benannte Zahl kann nicht nur mit einer unbenannten, sondern auch mit einer benannten Zahl dividirt werden. Denn im ersten Falle bestimmt der Divisor die Anzahl, der Quotient aber die Größe der Theile; im zweyten Falle bestimmt der Divisor die Größe, der Quotient aber die Anzahl der Theile. Die Art der Operation folgt §. 20.

§. 18.

Eine benannte Zahl reduciren heißt sie auf einen größern oder kleinern Namen bringen. Man bringt sie aber auf einen kleinern Namen, wenn man die Einheiten der höhern Klasse mit der Zahl der Theile der niedrern, welche jede Einheit der höhern enthält, multiplicirt; und auf einen größern Namen, wenn man die Einheiten der niedrern Klasse mit der Zahl der Theile, welche eine Einheit der verlangten höhern Klasse ausmachen, dividirt.

§. 19.

Soll man zusammengesetzte benannte Zahlen mit einer unbenannten Zahl multipliciren: so multiplicire man damit die benannte Zahl von der niedrigsten bis zur höchsten Klasse, bringe das Product jeder niedrern Klasse auf den nächst größern Namen, §. 18. und addire den gefundenen Quotienten zu dem Producte der höhern Klasse.

§. 20.

Soll man zusammengesetzte benannte Zahlen mit einer unbenannten Zahl dividiren: so dividire man sie damit von der höchsten Klasse an, bringe den etwannigen Rest auf den nächst kleinern Namen §. 18, und schlage ihn zur nächst folgenden Klasse, mit welcher man eben so verfährt. Wäre aber der Divisor benannt, so reducire man alles auf einerley Namen §. 18, und suche alsdenn den Quotienten.

VI. Maaß der Zahlen.

§. 21.

Eine Zahl geht auf in einer andern, wenn sie die andre ohne Rest dividirt. Eine Zahl heißt ein

Maaß

§. 23.

Numeri primi sunt: 1. 2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. etc.

§. 24.

Pars aliquota est, quae aliquoties sumta toti est aequalis. Sic 3 est pars aliquota numeri 12 quia quater sumta eidem aequalis est.

Pars aliquanta est, quae aliquoties sumta toto vel major vel minor est: ut 5 est pars aliquanta numeri 12.

Maaß der andern, wenn sie in der andern aufgehet.

Zusatz. Demnach ist die Einheit das Maaß einer jeden Zahl; und jede Zahl ein Maaß von ihr selbst.

§. 22.

Ein gemeines Maaß mehrerer Zahlen ist, was in jeder dieser Zahlen aufgehet. Das größte gemeine Maaß mehrerer Zahlen ist, wenn nichts grösseres in jeder dieser Zahlen aufgehet.

§. 23.

Eine Zahl, welche nur sich selbst, oder die Einheit, zum Maaße hat, heißt eine einfache Zahl, oder Primzahl. Jede Zahl aber, die irgend eine von ihr verschiedene Zahl zum Maaße hat, heißt eine zusammengesetzte Zahl.

§. 24.

Eine zusammengesetzte Zahl ist als ein Product, und ihr Maaß nebst dem daher entstehenden Quotienten als ihre Factoren anzusehen; und man sagt: sie sey aus diesen Factoren oder Theilern zusammengesetzt, oder werde in diese Factoren oder Theiler zerfällt. So ist z. E. $105 = 3 . 35$.

§. 25.

Jede Zahl ist entweder eine Primzahl, oder eine aus Primzahlen zusammengesetzte Zahl.

Denn ist sie keine Primzahl, so besteht sie aus Factoren. Sind nun diese Factoren auch zusammengesetzt, so lassen sie sich aufs neue in Factoren zerfällen, so lange sie noch keine Primzahlen sind. So ist z. E. $105 = 3 . 5 . 7$.

§. 26.

Eine Zahl, 7, die in einem von den Factoren eines Products (35. 3) aufgeht, die muß auch in diesem Producte aufgehen.

Denn sie ist alsdenn auch ein Factor des Products, (5. 7. 3).

§. 27.

Eine Zahl, 5, die in zwey andern Zahlen, 15, 5, aufgeht, die muß auch in der Summe dieser beyden Zahlen, 20, aufgehen.

Denn da sie in den beyden Zahlen aufgeht, so ist sie in der einen sowohl als in der andern ohne Rest ein- oder etlichemal, folglich in beyden zusammen ohne Rest etlichemal enthalten, und geht also in der Summe auf.

§. 28.

Eine Zahl, 5, die in der Summe zweyer Zahlen, 25, und in einer von beyden, 10, aufgeht, die muß auch in der andern, 15, aufgehen.

Denn da sie in der Voraussetzung in der einen Zahl und in der Summe ohne Rest ein- oder etlichemal enthalten ist, so muß sie auch in der andern ohne Rest ein- oder etlichemal enthalten seyn, und geht also in der andern Zahl auf.

§. 29.

Wenn von zwey Zahlen, 21, 7, die kleinere in der größern aufgeht: so ist sie das größte gemeine Maaß der beyden Zahlen.

Denn da die kleinere in ihr selbst, und nach der Voraussetzung in der größern aufgeht, so ist sie ein gemeines Maaß von beyden; und zwar das größte, weil offenbar kein größeres in der kleinern aufgehen kann.

§. 30.

§. 30.

Wenn von zwey Zahlen, 28, 12, die kleinere in der größern nicht aufgeht: so kann das gemeine Maaß von beyden nicht größer, als der Rest, 4, seyn.

Denn die größere Zahl besteht aus dem Producte der kleinern Zahl in den Quotienten, (12 . 2) und aus dem Reste 4, oder ist die Summe dieses Products und des Rests. Ein gemeines Maaß beyder Zahlen gehet also in der Summe und in dem Producte auf, und muß daher im Reste aufgehen (§. 28), kann also nicht größer als der Rest seyn.

§. 31.

Wenn von zwey Zahlen, 28, 12, die kleinere in der größern nicht aufgeht, aber wohl der Rest, 4, in der kleinern: so ist der Rest das größte gemeine Maaß der beyden Zahlen.

Denn gehet der Rest in der kleinern Zahl auf, so geht er auch in dem Producte der kleinern Zahl in den Quotienten auf §. 26. aber auch in sich selbst, folglich in der Summe des Products und des Rests §. 27. das ist, in der größern Zahl, und ist also ein gemeines Maaß beyder Zahlen; und zwar nach §. 30. das größte.

§. 32.

Wenn von zwey Zahlen die kleinere, 12, in der größern, 32, nicht aufgehet, auch nicht der Rest, 8, in der kleinern: so ist das größte gemeine Maaß der kleinern und des Rests, auch das größte gemeine Maaß der ersten beyden Zahlen.

Denn hätten diese noch ein größeres, so müßte daßelbe auch im Reste aufgehen §. 28, und wäre folglich ein gemeines Maaß der kleinern Zahl und des Restes, und zwar noch größer als das, was vorher schon als das größte angenommen war, welches unmöglich ist.

§. 33.

Wenn man von zwey gegebenen Zahlen, 301, 189, die größere mit der kleinern dividirt, und, wenn ein Rest bleibt, den vorhergehenden Divisor mit diesem Reste, und dies immer so fort, bis man einen Rest erhält, der endlich in dem nächst vorhergehenden Divisor aufgehet: so ist solcher Rest das größte gemeine Maaß der beyden gegebenen Zahlen.

Denn da solcher Rest das größte gemeine Maaß für das letzte Paar ist, so ist er es nach §. 32. auch für das vorhergehende Paar, und immer so weiter für alle vorhergehende Paare bis auf das erste.

So giebt z. E. von den gegebenen Zahlen 301, 189, die kleinere in die größere dividirt, zum ersten Reste 112; dieser in 189, zum zweyten Reste 77; dieser in 112, zum dritten Reste 35; dieser in 77, zum vierten Reste 7, welcher in 35 aufgehet, und daher das größte gemeine Maaß der beyden Zahlen, 301, 189, ist.

Denn da der letzte Rest 7 offenbar das größte gemeine Maaß von 35 und 7 ist, so ist er es auch nach §. 32. von 77 und 35, folglich von 112 und 77, folglich von 189 und 112, folglich von 301 und 189.

VII. Potenzen und Wurzeln.

§. 34.

Entsteht ein Product aus lauter gleichen Factoren, so daß ein und derselbe Factor mehrmal in sich selbst multiplicirt dieses Product giebt: so heißt solches Product die Potenz dieses Factors, und solcher Factor die Wurzel dieses Products.

So ist 16 = 4 . 4, so wie auch 64 = 4 . 4 . 4, eine Potenz der Zahl 4; und umgekehrt 4 eine Wurzel der Zahl 16, so wie auch der Zahl 64.

§. 35.

Bey jeder Potenz heißt die Anzahl der gleichen Factoren der Exponent, wornach die Potenzen sowohl als die Wurzeln gezählt werden. Die zweyte Potenz heißt auch die Quadratzahl; die dritte die Cubikzahl; die vierte die Biquadratzahl: so wie auch die zweyte, dritte, vierte Wurzel die Quadrat- Cubik- Biquadratwurzel genannt wird.

So ist z. E. von 4 die Quadratzahl 16; die Cubikzahl 64; die Biquadratzahl 256. Umgekehrt ist 4 die Quadratwurzel aus 16; die Cubikwurzel aus 64; die Biquadratwurzel aus 256.

§. 36.

Eine Zahl potenziren, oder zu einer Potenz erheben, heißt die Zahl so vielmal in sich selbst multipliciren, als der Exponent Einheiten enthält.

So ist z. E. $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$; $4^3 = 16 \cdot 4 = 64$; $4^4 = 64 \cdot 4 = 256$; $4^5 = 256 \cdot 4 = 1024$ u. s. w.

§. 37.

Eine Zahl extrahiren, oder die Wurzel aus einer Zahl ziehen, heißt eine Zahl finden, welche so vielmal, als der Exponent Einheiten enthält, in sich selbst multiplicirt, der gegebenen Zahl gleich wird.

So ist z. E. $\sqrt{16} = 4$, weil $4 \cdot 4 = 16$; $\sqrt[3]{64} = 4$, weil $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$; $\sqrt[4]{256} = 4$, weil $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$; $\sqrt[5]{1024} = 4$, weil $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1024$. u. s. w.

§. 38.

Eine zweytheilige Zahl, oder ein Binomium heißt eine Zahl, die aus zwey Theilen besteht. Das

Quadrat einer zweytheiligen Zahl besteht daher aus den Quadraten beyder Theile und dem zweyfachen Producte des einen Theils in den andern.

Denn gleiche Potenzen von gleichen Zahlen sind einander gleich. So ist z. E. $73 = 70 + 3$, folglich $73^2 = (70 + 3)^2$, das ist, $73 . 73 = (70 + 3) . (70 + 3)$. Multiplicirt man nun den ersten und zweyten Theil mit dem ersten, so entsteht das Quadrat des ersten, und das Product des ersten in den zweyten; multiplicirt man ferner den ersten und zweyten Theil mit dem zweyten, so entsteht abermals das Product des zweyten in den ersten, und das Quadrat des zweyten Theils; folglich zusammen die Quadrate beyder Theile, und das zweyfache Product des einen Theils in den andern. So ist z. E. $73^2 = (70 + 3)^2 = (70 + 3) . (70 + 3) = 70^2 + 2 . (70 . 3) + 3^2 = 5329$.

§. 39.

Aufgabe: aus einer gegebenen Zahl, 413452, die Quadratwurzel zu ziehen.

Die gesammte Folge der Operation zeigt dieses Schema:

```
       41|34|52|643
       36 |
  12)   534
        496
128)     3852
         3849
            3
```

Die einzelnen Stücke der Operation sind allgemein diese:

1) Theile die gegebene Zahl 413452 von der Rechten an in Klassen, jede zu zwey Ziffern.

2) Su-

2) Suche in dem sogenannten Wurzeltäflein, welches die Quadrate aller neun einfachen Ziffern enthält, eine Quadratzahl, 36, welche der ersten Klasse zur Linken, 41, gleich ist, oder am nächsten kommt, und subtrahire solche Quadratzahl; so ist ihre Wurzel, 6, der höchste Theil der gesuchten Wurzel.

3) Dieser Theil verdoppelt, 12, in den Rest der ersten Klasse mit Zuziehung der ersten Ziffer der folgenden Klasse, 53, dividirt, giebt den nächstfolgenden Theil, 4, dessen Quadrat, nebst Product in dem gebrauchten Divisor von dem Rest der ersten Klasse mit Zuziehung der zweyten Klasse, subtrahirt wird.

4) Mit den bereits gefundenen Theilen der Wurzel, 64, verfahre man eben so, wie mit dem ersten, 6, und wiederhole solche Operationen bis zur letzten Klasse: so erhält man nach und nach alle Theile der gesuchten Wurzel, welche in sich selbst multiplicirt der gegebenen Zahl, um den etwannigen letzten Rest vermindert, gleich ist. So ist in dem gegebnen Beyspiele $643^2 = 413452 - 3$. und nach §. 38. $643^2 = (640 + 3)^2 = (640^2 + 2.(640.3) + 3^2$, und $640^2 = 600^2 + 2.(600.40) + 40^2$.

§. 40.

Aufgabe. Bey Ausziehung der Quadratwurzel die bereits berechneten Quadrattafeln, welche man in Samlungen mathematischer Tafeln findet, zur Abkürzung der Arbeit zu gebrauchen.

Hat man die gegebene Zahl in ihre Klassen getheilt, so suche man in den Tafeln eine Quadratzahl, welche allen, oder den ersten Klassen am nächsten kommt, und subtrahire solche davon. Den etwannigen Rest schlage man zur ersten Zahl der etwa folgenden Klasse, und dividire darein mit der doppelten Wurzel der Tafel: so findet man zu solcher Wurzel den zunächst folgenden Theil, und

durch die weitere Operation §. 39. die etwa noch übrigen Theile.

Zu der obigen Zahl 41|34|52| findet man in den Tafeln die nächste Quadratzahl 413449 und die dazu gehörige Wurzel 643, ohne weitere Rechnung.

Zu der Zahl 3|28|85|63|45| findet man für die drey ersten Klassen in den Tafeln die nächste Quadratzahl 32761 und dabey die Wurzel 181, wovon man auf folgende Art Gebrauch macht:

```
        3|28|85|63|45|18134
         3 27 61 |  |
362)      1 24 63   |
          1 08 69   |
3626)      15 94 45
           14 50 56
           1 43 89
```

Demnach ist 18134 die Quadratwurzel der gegebnen Zahl um den zuletzt gebliebnen Rest 14389 vermindert. Oder die Quadratwurzel der gegebenen Zahl selbst fällt zwischen die Zahlen 18134 und 18135, wovon jene zu klein, diese zu groß ist.

VIII. Begriff der Rechnungsarten.

§. 41.

Rechnen heißt aus gegebenen oder bekannten, gesuchte oder unbekannte Zahlen finden, welche auf die gegebenen eine bestimmte Beziehung haben. Die Art dieses zu bewerkstelligen ist nach Verschiedenheit solcher Beziehung verschieden, und heißt eine Rechnungsart oder Species der Arithmetik; daher es so viele Rechnungsarten giebt, als verschiedene Bezie-

ziehungen der gesuchten Zahl auf die gegebenen Zahlen statt finden können.

§. 42.

Jede Zahl ist wie jede Größe aus Theilen zusammengesetzt, welche entweder gleich oder ungleich sind. Ist die Zahl aus ungleichen Theilen zusammengesetzt, so heißt sie Summe; ist sie aus gleichen Theilen zusammengesetzt, so heißt sie Product oder Factum, jeder ihrer gleichen Theile aber, und die Anzahl derselben heißen die Factoren. Hieraus entstehen vier Rechnungsarten:

1) Die Addition lehret die Zahl finden, deren ungleiche Theile gegeben sind.

2) Die Subtraction lehret zu einer Zahl und einem ihrer ungleichen Theile den andern Theil finden.

3) Die Multiplication lehret aus den Factoren das Product, das ist, eine Zahl finden, welche aus lauter gleichen Theilen besteht, wenn einer ihrer gleichen Theile und die Anzahl derselben gegeben ist.

4) Die Division lehret zu einem Producte und einem der beyden Factoren den andern Factor, das ist, aus einer Zahl die aus gleichen Theilen besteht und einem ihrer Theile die Anzahl der Theile oder einen der gleichen Theile aus ihrer Anzahl, finden.

§. 43.

Bey einem Producte läßt sich noch der Unterschied gedenken, daß die Factoren desselben entweder gleich oder ungleich sind. Der letzte Fall ist besonders für die gemeine Multiplication. Im ersten Falle aber heißt jeder der gleichen Factoren die Wurzel, die Anzahl derselben der Exponent, und das Factum die

Potenz. Sind von diesen drey Zahlen zwey gegeben, und man soll die dritte daraus finden, so entstehen noch drey Rechnungsarten:

1) Findet man aus der Wurzel und dem Exponenten die Potenz: so heißt dieses potenziren, oder zur Potenz erheben.

2) Findet man aus der Potenz und dem Exponenten die Wurzel; so heißt dies extrahiren, oder die Wurzel ausziehen.

3) Ist aber die Wurzel und Potenz gegeben: so heißt der Exponent in dieser Rücksicht der Logarithmus der Potenz, und die Art denselben zu finden die logarithmische Rechnung, von welcher erst im Folgenden.

IX. Grundsätze der ganzen Mathematik.

§. 44.

Jede Größe ist sich selbst, so wie auch ihren Theilen zusammen genommen, gleich; folglich größer als jeder ihrer Theile.

§. 45.

Zwey Größen, die einer dritten gleich, sind selbst einander gleich.

§. 46.

Gleiches zu Gleichem addirt, giebt gleiche Summen; Gleiches von Gleichem subtrahirt, giebt gleiche Differenzen.

§. 47.

Gleiches mit Gleichem multiplicirt, giebt gleiche Producte; Gleiches mit Gleichem dividirt, giebt gleiche Quotienten.

§. 48.

Gleiches zu Ungleichem addirt, giebt ungleiche Summen; Gleiches von Ungleichem subtrahirt, giebt ungleiche Differenzen.

§. 49.

Ungleiches mit Gleichem multiplicirt, giebt ungleiche Producte; Ungleiches mit Gleichem dividirt, giebt ungleiche Quotienten.

§. 50.

Sind zwey Zahlen einander gleich: so sind auch ihre Potenzen, so wie auch ihre Wurzeln, von gleichen Exponenten einander gleich. Sind zwey Zahlen ungleich: so sind auch ihre Potenzen und Wurzeln von gleichen Exponenten ungleich.

§. 51.

Addition und Subtraction; Multiplication und Division; Potenziren und Extrahiren heben einander auf.

§. 52.

Man kann den Multiplicans mit jeder Zahl multipliciren, wenn man das Product mit derselben Zahl wieder dividirt; und umgekehrt.

§. 53.

Man kann den Divisor mit jeder Zahl dividiren, wenn man den Quotienten mit derselben Zahl wieder multiplicirt; und umgekehrt.

§. 54.

Das Zeichen der Addition ist (+) der Subtraction (—) der Multiplication (.) der Division (:) oder ein Strich zwischen den unter einander gesetzten Dividendus und Divisor. Das Zeichen der Gleichheit ist (=) des größern (>) des kleinern (<) der Wurzel (r).

Zwey=

Zweytes Capitel.

Von den Brüchen.

1. Natur der Brüche.

§. 55.

Ein Bruch ist das Vielfache eines bestimmten Theils der Einheit, und besteht aus zwey Zahlen; dem Nenner, welcher den bestimmten Theil der Einheit anzeigt, und den Zähler, welcher das Vielfache dieses bestimmten Theils der Einheit anzeigt.

Da eine Zahl die Vielheit der Einheit ist, oder durch Vervielfältigung der Einheit entsteht, wobey die Größe der Einheit unbestimmt ist: so kann die Einheit wohl gar keine Größe haben, wie ein Punkt, oder auch so groß seyn als man nur immer will. Hat die Einheit irgend eine Größe: so kann sie beliebig in gleiche Theile getheilt, und ein solcher Theil eben sowohl als die Einheit selbst vervielfältigt werden; woraus denn ein Bruch, oder eine gebrochene Zahl entsteht, welche eben sowohl wie eine ganze Zahl das Vielfache einer Einheit ist; nur mit dem Unterschiede, daß die Einheit einer ganzen Zahl das Ganze, die Einheit einer gebrochenen Zahl aber ein bestimmter Theil des Ganzen ist.

So wird z. E. ein Thaler in 24 gleiche Theile oder Groschen getheilt, so daß $\frac{1}{24}$ Rthl. = 1 Gr. und 5 Rthl. = 5 . 1 Rthl.; aber 5 Gr. = 5 . 1 Gr. = 5 . $\frac{1}{24}$ Rthl. = $\frac{5}{24}$ Rthl.

§. 56.

Ein Bruch ist der Quotient, welcher entsteht, wenn eine Zahl mit einer andern dividirt werden soll, so daß der Zähler der Dividendus, und der Nenner der Divisor ist.

Theilte man alle Einheiten einer Zahl in eine bestimmte Anzahl von Theilen, so würde dadurch die Zahl selbst, welche ihren Einheiten zusammen gleich ist, auf die bestimmte Art getheilt. Demnach giebt es außer der bisherigen Methode der Division, mittelst welcher die Zahl selbst getheilt wird, und wobey der Dividendus nicht kleiner als der Divisor seyn darf, auch noch eine andre, welche die einzelnen Einheiten der Zahl theilt, wobey der Dividendus auch kleiner als der Divisor seyn kann.

Z. E. $\frac{5}{24}$ Rthl. heißt 5 Rthl. sollen in 24 gleiche Theile getheilt werden, und es ist $\frac{5}{24}$ Rthl. $= \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{24} \cdot 5 = 5$ Gr.

§. 57.

Jeder Bruch ist eine Art von benannter Zahl, so daß der Zähler als die Zahl selbst, und der Nenner als der Name anzusehen ist.

Eine unbenannte ganze Zahl besteht aus Einheiten, deren Art und Größe unbestimmt ist; ein Bruch aber aus Einheiten, welche bestimmte Theile einer Größe sind, und von solcher Bestimmung den Namen führen.

Z. E. bey dem Bruche $\frac{3}{4} = 3 \cdot \frac{1}{4}$ ist 3 die Zahl selbst und $\frac{1}{4}$ ihr Name.

§. 58.

Die Größe der Brüche beruhet bey einerley Nenner auf der Größe der Zähler; bey einerley Zähler auf der umgekehrten Größe der Nenner.

Bey

Bey einerley Nenner ist ein Bruch um so vielmal größer, um so vielmal größer sein Zähler ist; weil der Zähler die Zahl, und der Nenner der Name ist. Bey einerley Zähler hingegen ist ein Bruch um so vielmal grösser, um so vielmal kleiner sein Nenner ist; weil der Nenner die Größe der Einheit anzeigt, welche um so viel größer ist, als wenigere Theile sind, in welche man das Ganze theilt.

So ist z. E. $\frac{6}{7}$ noch einmal so groß als $\frac{3}{7}$ auf eben die Art, wie 6 ℔ noch einmal so groß, als 3 ℔; und $\frac{3}{4}$ noch einmal so groß als $\frac{3}{8}$ auf eben die Art, wie 3 Achtgroschenstücke noch einmal so groß als 3 Viergroschenstücke.

§. 59.

Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man entweder seinen Zähler mit solcher Zahl multiplicirt, oder seinen Nenner mit solcher Zahl dividirt, §. 58.

So ist $\frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

§. 60.

Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl dividirt, wenn man entweder seinen Zähler mit solcher Zahl dividirt, oder, seinen Nenner mit solcher Zahl multiplicirt, §. 58.

So ist $\frac{6}{7} : 3 = \frac{2}{7} = \frac{6}{21}$.

§. 61.

Ein Bruch behält seinen Werth ungeändert, wenn man seinen Zähler und Nenner mit einerley Zahl entweder multiplicirt, oder dividirt. §. 59. 60.

So ist $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$; und $\frac{9}{12} = \frac{9 : 3}{12 : 3} = \frac{3}{4}$.

§. 62.

Wird ein Bruch mit seinem Nenner multiplicirt: so ist das Product der Zähler. §. 61.

So ist $\frac{3}{4} \cdot 4 = \frac{3 \cdot 4}{4} = \frac{3}{1} = 3$.

§. 63.

Eine ganze Zahl ist einem Bruche gleich, dessen Zähler das Product der ganzen Zahl in den Nenner ist. §. 61.

So ist $3 = \frac{3}{1} = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 4} = \frac{3 \cdot 4}{4}$.

§. 64.

Ein eigentlicher Bruch ist, dessen Nenner im Zähler nicht aufgeht; ein uneigentlicher Bruch, dessen Nenner im Zähler aufgeht. Ein ächter Bruch ist, dessen Zähler kleiner als der Nenner ist; ein unächter Bruch, dessen Zähler nicht kleiner als der Nenner ist. Eine gemischte Zahl besteht aus einer ganzen Zahl und einem ächten Bruche, und entsteht aus der Division ganzer Zahlen, wenn dabey ein Rest bleibt; indem man alsdenn einen Bruch, dessen Zähler der Rest, und dessen Nenner der Divisor ist, zu dem gefundenen Quotienten addirt. §. 56.

§. 65.

Ein Bruch ist benannt oder unbenannt, je nachdem die Einheit, deren bestimmte Theile er enthält, benannt oder unbenannt ist.

§. 66.

Ein benannter Bruch wird reducirt, wenn man mit der Zahl der Theile entweder den Zähler des grössern, oder den Nenner des kleinern Namens multiplicirt. §. 18.

II. Auf-

II. Aufheben der Brüche.

§. 67.

Einen Bruch aufheben heißt, ihn auf eine kleinere oder die kleinste Benennung bringen, das ist, ohne seinen Werth zu ändern, durch kleinere, oder die kleinsten Zahlen ausdrücken.

§. 68.

Ein Bruch wird aufgehoben, wenn man Zähler und Nenner des Bruchs mit ihrem gemeinen Maaße, und besonders mit ihrem größten gemeinen Maaße, welches man nach §. 33. fiudet, dividirt. §. 61. Z. E. $\frac{1464 : 61}{4697 : 61} = \frac{24}{77}$.

Zusatz. Haben Zähler und Nenner eines Bruchs die Einheit zum größten gemeinen Maaße: so läßt sich der Bruch nicht durch kleinere Zahlen ausdrücken, und also nicht aufheben. Z. E. $\frac{216}{1147}$. §. 33.

§. 69.

Auch kann man einen Bruch aufheben, wenn man Zähler und Nenner in ihre einfachen Factoren zerfällt §. 25, (wozu man die schon berechneten Factorentafeln gebrauchen kann) und die gemeinschaftlichen gegen einander vertilgt.

So ist $\frac{2310}{9350} = \frac{\cancel{2} \cdot 7 \cdot \cancel{11} \cdot \cancel{5} \cdot 3}{\cancel{5} \cdot \cancel{11} \cdot 17 \cdot \cancel{2} \cdot 5} = \frac{7 \cdot 3}{17 \cdot 5} = \frac{21}{85}$.

III. Gleichnamige Brüche.

§. 70.

Brüche heißen gleichnamig, die einerley Nenner haben; ungleichnamig, die verschiedne Nenner haben. Letztere gleichnamig machen, oder, unter einer=

einerley Benennung bringen heißt, andre den gegebnen gleiche Brüche finden, die einerley Nenner, oder einen Generalnenner haben.

§. 71.

Man macht Brüche gleichnamig, wenn man Zähler und Nenner eines jeden Bruchs mit dem Nenner des andern, oder, wenn es mehrere sind, mit dem Producte aus den Nennern der übrigen Brüche multiplicirt. §. 61.

Wären z. E. die Brüche $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{7}$ gegeben, so ist $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 7} = \frac{21}{28}$, und $\frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{20}{28}$.

Oder wären $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$ gegeben, so ist $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{70}{105}$; $\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 7}{5 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{84}{105}$; $\frac{6}{7} = \frac{6 \cdot 3 \cdot 5}{7 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{90}{105}$.

§. 72.

Der kleinste Generalnenner mehrerer Brüche ist die kleinste unter den Zahlen, worinn alle Specialnenner aufgehen.

Man findet aber den kleinsten Generalnenner, wenn man die Specialnenner neben einander setzt; solche mit einem Maaße dividirt, welches wo nicht alle doch die meisten gemein haben; die gefundnen Quotienten, und die durch den gebrauchten Divisor nicht theilbaren Nenner darunter, den gebrauchten Divisor aber zur Seite setzt; mit den darunter gesetzten Zahlen auf eben die Art verfährt, und die Operation so lange fortsetzt, bis kein gemeinschaftliches Maaß mehr statt findet. Alsdenn ist das Product aus den übrig gebliebnen Zahlen und allen gebrauchten Divisoren der gesuchte kleinste Generalnenner. Z. E.

gegebe-

gegebene Nenner 63. 42. 84

Divisor 21) 3. 2. 4

Divisor 2) 3. 1. 2

folglich der kleinste Generalnenner = 3. 1. 2. 21. 2 = 252.

Den Grund dieses Verfahrens einzusehen, erwäge man, daß bey Aufsuchung des kleinsten Generalnenners, die gebrauchten Divisoren und übrig gebliebnen Zahlen, die Factoren der gegebnen Nenner sind; folglich jeder Nenner in dem daraus gemachten Producte aufgehen müsse. §. 26; folglich keine kleinere Zahl zu dieser Absicht statt finden könne; folglich solches Product der kleinste Generalnenner sey.

§. 73.

Sollen Brüche gleichnamig gemacht werden, so daß sie nicht nur einen Generalnenner, sondern auch den kleinsten Generalnenner haben: so suche man nach §. 72. die kleinste Zahl, worinn alle Specialnenner aufgehen; dividire solche mit jedem gegebenen Nenner; und multiplicire den dazu gehörigen Zähler, mit dem jedesmaligen Quotienten. Das also gefundene Product giebt den neuen Zähler eines jeden Bruchs, die zuerst gefundene Zahl aber den kleinsten Generalnenner der gegebenen Brüche. Z. E.

Gegebene Brüche.		Quotienten.	neue Zähler.
Generalnenner 18	$\frac{4}{9}$	2	8
	$\frac{5}{6}$	3	15
	$\frac{2}{3}$	6	12
Generalnenner 252	$\frac{13}{63}$	4	52
	$\frac{9}{42}$	6	54
	$\frac{11}{84}$	3	33

Nach

Nach §. 72. hat man den kleinsten Generalnenner der gegebnen Brüche gefunden. Sucht man nun den Quotienten eines jeden Nenners in solchen Generalnenner, so hat man die Factoren des Nenners für jeden Bruch; so daß, wenn man Zähler und Nenner eines jeden Bruchs mit dem zugehörigen Quotienten multiplicirt, die Brüche ihren Werth behalten, und alle eben denselben kleinsten Generalnenner erhalten.

IV. Addition der Brüche.

§. 74.

Brüche, welche einerley Nenner haben, oder auf einerley Nenner gebracht sind, werden addirt, wenn man ihre Zähler addirt, so daß die Summe ein Bruch wird, dessen Zähler die Summe der gegebenen Zähler, und dessen Nenner der gegebene gemeinschaftliche Nenner ist.

§. 75.

Soll ein Bruch zu einer ganzen Zahl addirt werden: so verwandle man nach §. 63. die ganze Zahl in einen Bruch von gleichem Nenner, und addire beyde Brüche.

So ist $4 + \frac{5}{6} = \frac{24}{6} + \frac{5}{6} = \frac{29}{6}$.

§. 76.

Sollen gemischte Zahlen addirt werden: so verwandle man sie nach §. 75. in unächte Brüche; oder addire die ganzen Zahlen und die angehängten Brüche, jede besonders.

So ist $4\frac{2}{3} + 2\frac{3}{4} = \frac{14}{3} + \frac{11}{4}$. Oder $4\frac{2}{3} + 2\frac{3}{4} = 4 + 2 + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}$.

§. 77.

Sollen benannte Brüche addirt werden: so müssen sie gleichen Namen führen, oder nach §. 66. auf gleichen Namen reducirt werden.

So ist $\frac{3}{5}$ Rthl. + $\frac{2}{3}$ Gr. = $\frac{3 \cdot 24}{5}$ Gr. + $\frac{2}{3}$ Gr. = $\frac{3 \cdot 24 \cdot 3}{5 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{226}{15}$ gr. = 15 $\frac{1}{15}$ gr. = 15 gr. + $\frac{12}{15}$ Pf. Oder $\frac{3}{5}$ Rthl. + $\frac{2}{3}$ Gr. = $\frac{3}{5}$ Rthl. + $\frac{2}{3 \cdot 24}$ Rthl.

V. Subtraction der Brüche.

§. 78.

Brüche, welche einerley Nenner haben, oder auf einerley Nenner gebracht sind, werden subtrahirt, wenn man ihre Zähler subtrahirt, so daß die Differenz ein Bruch wird, dessen Zähler die Differenz der gegebenen Zähler, und dessen Nenner der gegebene gemeinschaftliche Nenner ist.

§. 79.

Soll ein Bruch von einer ganzen Zahl subtrahirt werden, so verwandle man nach §. 63. die ganze Zahl in einen Bruch von gleichen Nenner, und subtrahire die Brüche. Oder, man nehme von der ganzen Zahl eine Einheit, welche man in einen Bruch vom gegebenen Nenner verwandelt, um von demselben den gegebenen Bruch zu subtrahiren.

So ist $4 - \frac{5}{6} = \frac{24}{6} - \frac{5}{6} = \frac{19}{6}$. Oder $4 - \frac{5}{6} = 3 + \frac{6}{6} - \frac{5}{6} = 3\frac{1}{6}$.

§. 80.

Sollen gemischte Zahlen subtrahirt werden: so verwandle man sie nach §. 75. in unächte Brüche; oder

oder subtrahire die ganzen Zahlen, und die angehängten Brüche, jede besonders.

§. 81.

Sollen benannte Brüche subtrahirt werden: so müssen sie gleichen Namen führen, oder nach §. 66. auf gleichen Namen reducirt werden.

VI. Multiplication der Brüche.

§. 82.

Eine Zahl wird mit einem Bruche multiplicirt, wenn man sie mit dem Zähler des Bruchs multiplicirt, und das Product mit dem Nenner dividirt.

Da der Zähler ein Product des Bruchs in den Nenner ist §. 62: so kann man die gegebene Zahl statt des Bruchs mit dem Zähler multipliciren, wenn man das Product mit dem Nenner wieder dividirt, §. 52. Soll z. E. eine Zahl mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt werden: so multiplicire man sie mit $\frac{3}{4} \cdot 4$, das ist, mit 3, und dividire das gefundene Product wieder mit 4.

§. 83.

Brüche werden mit einander multiplicirt, wenn man die Zähler mit einander, und die Nenner mit einander multiplicirt, so daß das Product ein Bruch wird, dessen Zähler das Product der gegebenen Zähler, und dessen Nenner das Product der gegebenen Nenner ist.

Denn der Multiplicandus wird nach §. 82. mit dem Multiplicans multiplicirt, wenn man erstern mit dem Zähler des letztern multiplicirt §. 59. und mit dem Nenner dividirt §. 60. Dies giebt zum Producte einen Bruch, dessen Zähler das Product der gegebenen Zähler,

und dessen Nenner das Product der gegebenen Nenner ist. Doch kann man auch hiebey die §. 59. 60. angezeigte andre Methode zuweilen zur Abkürzung gebrauchen.

So ist $\frac{9}{14} \cdot \frac{2}{3} = (\frac{9}{14} \cdot 2) : 3 = \frac{9 \cdot 2}{14 \cdot 3} = \frac{9 : 3}{14 : 2}$.
So auch $\frac{10}{11} \cdot \frac{2}{5} = (\frac{10}{11} \cdot 2) : 5 = \frac{10 \cdot 2}{11 \cdot 5} = \frac{(10 : 5) \cdot 2}{11}$.
So auch $\frac{33}{35} \cdot \frac{7}{8} = (\frac{33}{35} \cdot 7) : 8 = \frac{33 \cdot 7}{35 \cdot 8} = \frac{33}{(35 : 7) \cdot 8}$.

§. 84.

Sollen gemischte Zahlen multiplicirt werden: so verwandle man sie nach §. 75. in unächte Brüche.

So ist $(4\frac{2}{3}) \cdot (2\frac{3}{4}) = \frac{14}{3} \cdot \frac{11}{4} = \frac{14 \cdot 11}{3 \cdot 4}$.

§. 85.

Soll eine benannte Zahl mit einem unbenannten Bruche multiplicirt werden: so multiplicire man solche Zahl mit dem Zähler des Bruchs, und dividire das Product mit dem Nenner. §. 82.

VII. Division der Brüche.

§. 86.

Eine Zahl wird mit einem Bruche dividirt, wenn man sie mit dem Zähler des Bruchs dividirt, und den Quotienten mit dem Nenner multiplicirt, das ist, wenn man sie mit dem umgekehrten Bruche multiplicirt. §. 82.

Da der Zähler ein Product des Bruchs in den Nenner ist §. 62: so kann man die gegebene Zahl statt des Bruchs mit dem Zähler dividiren, wenn man den Quo-

tienten mit dem Nenner wieder multiplicirt. §. 53. Soll z. E. eine Zahl mit $\frac{3}{4}$ dividirt werden: so dividire man sie mit $\frac{3}{4} \cdot 4$, das ist, mit 3, und multiplire den gefundenen Quotienten wieder mit 4.

§. 87.

Brüche werden mit einander dividirt, wenn man den Dividendus mit dem umgekehrten Divisor multiplicirt, so daß der Quotient ein Bruch wird, dessen Zähler das Product des Zählers des Dividendus in den Nenner des Divisors, und dessen Nenner das Product des Nenners des Dividendus in den Zähler des Divisors ist.

Denn der Dividendus wird nach §. 86. mit dem Divisor dividirt, wenn man erstern mit dem Zähler des letztern dividirt §. 60. und mit dem Nenner multiplicirt §. 59. Dies giebt zum Quotienten das Product des Dividendus in den umgekehrten Divisor. Doch kann man auch hiebey die §. 60. 59. angezeigte andre Methode zuweilen zur Abkürzung gebrauchen.

So ist $\frac{21}{32} : \frac{3}{8} = (\frac{21}{32} : 3) \cdot 8 = \frac{21}{32} \cdot \frac{8}{3} = \frac{21 \cdot 8}{32 \cdot 3} = \frac{21 : 3}{32 : 8} = \frac{7}{4}$. So auch $\frac{12}{17} : \frac{4}{9} = (\frac{12}{17} : 4) \cdot 9 = \frac{12}{17} \cdot \frac{9}{4} = \frac{(12 : 4) \cdot 9}{17} = \frac{27}{17}$. So auch $\frac{17}{24} : \frac{5}{8} = (\frac{17}{24} : 5) \cdot 8 = \frac{17 \cdot 8}{24 \cdot 5} = \frac{17}{24} \cdot \frac{8}{5} = \frac{17}{(24 : 8) \cdot 5} = \frac{17}{15}$.

§. 88.

Sollen gemischte Zahlen dividirt werden: so verwandle man sie nach §. 75. in unächte Brüche.

So ist $(4\frac{2}{3}) : (2\frac{3}{4}) = \frac{14}{3} : \frac{11}{4} = \frac{14}{3} \cdot \frac{4}{11}$.

§. 89.

§. 89.

Soll eine benannte Zahl mit einem unbenannten Bruche dividirt werden: so dividire man die benannte Zahl mit dem Zähler des Bruchs, und multiplicire den Quotienten mit dem Nenner. §. 86.

§. 90.

Sollen benannte Brüche dividirt werden: so reducire man sie auf einerley Namen. §. 66.

§. 91.

Einen irregulären Bruch, dessen Zähler und Nenner eine gebrochene Zahl ist, verwandelt man in einen regulären, dessen Zähler und Nenner ganze Zahlen sind; wenn man den Zähler mit dem Nenner dividirt, wovon der Grund §. 56.

So ist $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}} = \frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5}$.

VIII. Potenzen und Wurzeln der Brüche.

§. 92.

Die Potenz eines Bruchs entsteht, wenn der Bruch mehrmal in sich selbst multiplicirt wird. Der Bruch heißt alsdenn die Wurzel des daher entstehenden Products. Alles wie bey ganzen Zahlen. §. 35.

§. 93.

Die Potenz eines Bruchs ist daher ein Bruch, dessen Zähler dieselbe Potenz des gegebenen Zählers, und dessen Nenner dieselbe Potenz des gegebenen Nenners ist.

So giebt z. E. die Quadratzahl eines Bruchs die Quadratzahl des Zählers und die Quadratzahl des Nenners.

§. 94.

Die **Wurzel** eines Bruchs ist ebenfalls ein Bruch, dessen Zähler dieselbe Wurzel des gegebenen Zählers, und dessen Nenner dieselbe Wurzel des gegebnen Nenners ist.

So giebt z. E. die Quadratwurzel eines Bruchs die Quadratwurzel des Zählers, und die Quadratwurzel des Nenners.

Drit-

[illegible]

Von den Proportionen.

1. Erklärungen.

§. [illegible]

[illegible]

[illegible]

§. 96.

[illegible]

Drittes Kapitel.

Von den Proportionen.

I. Erklärungen.

§. 95.

Zwey Größen sind überhaupt in einer Verhältniß, in so fern die eine aus der andern entstehen kann; insbesondre aber, in so fern die eine das Vielfache der andern, oder eines bestimmten Theils der andern ist; und bey Zahlen, in so fern die eine ein Product der andern in irgend einen Factor ist, welcher alsdenn der Verhältnißname heißt.

In welcher Verhältniß zwey Zahlen sind, erkennt man also aus der Division der einen in die andre, und der daher entstehende Quotient ist der Verhältnißname. Daher kann auch die Verhältniß durch das Zeichen der Division, oder auch wie ein Bruch bezeichnet werden.

§. 96.

Vier Zahlen sind proportionirt, wenn der Verhältnißname des ersten Paares dem Verhältnißnamen des zweyten Paares gleich ist. Oder die Proportion ist die Gleichheit zweyer Verhältnisse oder zweyer Brüche. Die Zahlen selbst heißen die Glieder der Proportion. Das erste und dritte nennt man die Vorderglieder, das zweyte und vierte die Hinterglieder; das erste und vierte die äußern, das zweyte und dritte die mittlern Glieder. Durch gleichnamige Glieder versteht man entweder Vorderglieder, oder Hinterglieder.

§. 97.

Eine Proportion heißt abgesondert, *proportio discreta*, deren mittlere Glieder verschieden sind; stetig aber, *proportio continua*, deren mittlere Glieder einerley sind.

§. 98.

Bezeichnet man die Glieder einer Proportion mit den vier ersten Buchstaben des Alphabets, so daß sie ganze sowohl als gebrochene Zahlen anzeigen: so kann man $a : b = c : d$, oder $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, als die allgemeine Form einer jeden Proportion ansehen, wenn man bey einer stetigen Proportion annimmt, daß $b = c$ sey.

II. Lehrsätze.

§. 99.

Wenn man in einer Proportion die beyden ersten, oder die beyden letzten, oder zwey gleichnamige Glieder mit einerley Zahl multiplicirt, oder dividirt: so bleiben die Glieder noch proportionirt.

Denn ist $a : b = c : d$, so ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Wird nun Zähler und Nenner eines dieser, oder beyder Brüche, oder die Zähler, oder die Nenner, mit einerley Zahl multiplicirt oder dividirt: so bleiben die Brüche noch gleich §. 61. folglich die Zähler und Nenner noch proportionirt. §. 96.

§. 100.

Zwey Proportionen können in eine gebracht werden, wenn man die Glieder, wie sie in der Ordnung auf einander folgen, mit einander multiplicirt.

Denn

[illegible]

§ 100.

[illegible]

§ 101.

[illegible]

folglich [illegible]

Denn es sey $A : B = C : D$, und $a : b = c : d$, so ist $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ und $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. §. 96. Folglich ist auch $\frac{A}{B} \cdot \frac{a}{b} = \frac{C}{D} \cdot \frac{c}{d}$, §. 47, das ist, $\frac{A \cdot a}{B \cdot b} = \frac{C \cdot c}{D \cdot d}$ §. 83; folglich $A \cdot a : B \cdot b = C \cdot c : D \cdot d$, §. 96.

§. 101.

In jeder Proportion ist das Product aus den mittlern Gliedern dem Producte aus den äußern Gliedern, und daher in jeder stetigen Proportion das Quadrat des mittelsten Gliedes dem Producte aus den äußern Gliedern gleich.

Ist $a : b = c : d$, so ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, folglich unter einerley Benennung gebracht $\frac{a \cdot d}{b \cdot d} = \frac{c \cdot b}{d \cdot b}$ §. 71, folglich §. 47. mit $b \cdot d$ multiplicirt $a \cdot d = c \cdot b$. §. 62. Ist nun, wie in einer stetigen Proportion, $b = c$, so ist $a \cdot d = b \cdot b$.

§. 102.

In jeder Proportion lassen sich die beyden mittlern Glieder mit einander verwechseln.

Denn ist $a : b = c : d$, so ist $a \cdot d = b \cdot c$. §. 101. folglich §. 47. mit $c \cdot d$ dividirt $\frac{a \cdot d}{c \cdot d} = \frac{b \cdot c}{d \cdot c}$; folglich $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ §. 61. folglich $a : c = b : d$. §. 96.

§. 103.

In jeder Proportion lassen sich die Glieder umkehren.

Denn ist $a : b = c : d$, so ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, folglich §. 47. mit $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ dividirt $\frac{a}{b} . \frac{b}{a} = \frac{c}{d} . \frac{d}{c}$, §. 87. folglich §. 47. mit $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ dividirt $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$; folglich $b : a = d : c$, §. 96.

III. Aufgaben.

§. 104.

Zu drey Gliedern einer Proportion findet man das vierte, wenn man das Product aus den mittlern Gliedern mit dem ersten Gliede dividirt.

Denn ist $a : b = c : x$, so ist $a . x = b . c$ §. 101, folglich $x = \frac{b . c}{a}$, §. 47.

§. 105.

Zu den beyden äußern Gliedern einer stetigen Proportion findet man das mittelste Glied, wenn man aus dem Producte der äußern Glieder die Quadratwurzel ziehet.

Denn ist $a : x = x : d$, so ist $x . x = a . d$, §. 101. folglich $x = \sqrt{a . d}$, §. 50.

§. 106.

Aus zwey gleichen Producten macht man eine Proportion, wenn man die beyden Factoren des einen

Pro-

Products zu mittlern, und des andern zu äußern Gliedern macht.

Denn ist $a \cdot d = b \cdot c$, so ist $\frac{a \cdot d}{b} = c$, §. 47, folglich §. 60. $\frac{a \cdot d}{b \cdot d} = \frac{c}{d}$, folglich §. 61. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, folglich $a : b = c : d$, §. 96.

§. 107.

Aus jedem Producte macht man eine Proportion, wenn man dasselbe als das vierte Glied zur Einheit und den beyden Factoren ansiehet.

Denn ist $a \cdot b = P$, das ist $a \cdot b = 1 \cdot P$, so ist $1 : a = b : P$. §. 106.

Zusatz. Daher heißt multipliciren, eine Zahl finden, welche aus dem einen Factor so entsteht, als der andre Factor aus der Einheit.

§. 108.

Aus jedem Quotienten macht man eine Proportion, wenn man denselben als das vierte Glied zum Divisor, der Einheit, und dem Dividendus ansieht.

Denn ist $\frac{a}{b} = Q$, so ist $a = b \cdot Q$, §. 47, das ist, $1 \cdot a = b \cdot Q$; folglich $b : 1 = a : Q$, §. 106.

Zusatz. Daher heißt dividiren, eine Zahl finden, welche aus dem Dividendus so entsteht, als die Einheit aus dem Divisor.

§. 109.

Jeder Bruch wird in einen ihm gleichen Bruch von beliebigen Nenner verwandelt, wenn man den neuen Zähler als das vierte Glied zum vorigen Nenner, zum vorigen Zähler und zum neuen Nenner ansieht.

Denn es sey $\frac{a}{b} = \frac{x}{c}$, so ist §. 103. $b : a = c : x$.

Z. E. $\frac{3}{5}$ soll in einen Bruch, dessen Nenner 15 sey, verwandelt werden; so ist $5 : 3 = 15 : 9$, das ist, $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$.

Zweyte Abtheilung.

Die [illegible] Arzneymittel.

[illegible]

Erstes Kapitel.

Von der [illegible]

[illegible]

§. 1.

[illegible]

Zweyter Abschnitt.

Die allgemeine Arithmetik.

1. Von der Buchstabenrechnung.
2. Von den Zahlensystemen.
3. Von den Proportionen.
4. Von den Progreßionen.
5. Von den Logarithmen.

Erstes Kapitel.

Von der Buchstabenrechnung.

I. Allgemeine Bezeichnung der Größen.

§. 1.

Die Buchstaben des Alphabets werden als allgemeine Zeichen unbestimmter Größen gebraucht; und zwar die erstern, a, b, c, u. s. w. für bekannte, die letztern, als x, y, z, für unbekannte Größen. Man bedient sich hiezu vorzüglich der kleinen lateinischen und griechischen Buchstaben.

So ist $a : b = c : x$ eine allgemeine Form für jede Proportion, weil a, b, c, nicht nur alle Zahlen, welche man will, sondern auch jede andre Größen, bedeuten können, und x eine noch unbekannte Größe, welche aber durch die drey ersten bestimmt wird, anzeigt.

§. 2.

§. 2.

Werden zwey Größen neben, oder mit dazwischen gezogenen Striche, unter einander gesetzt: so zeigt dies im ersten Falle ihr Product, im zweyten ihren Quotienten an; doch bedient man sich hiezu auch wohl des Multiplications- und Divisionszeichens.

So heißt ab, oder $a \cdot b$, das Product der Größen a und b, welches entsteht, wenn man a mit b multiplicirt; hingegen $\frac{a}{b}$, oder $a : b$, der Quotient der Größe b in a, welcher entsteht, wenn man a mit b dividirt, oder der Bruch $\frac{a}{b}$. Eben dies bedeutet der Ausdruck $3a$, oder $3 \cdot a$, und $\frac{a}{3}$, oder $a : 3$, oder der Bruch $\frac{a}{3}$. Daher ist $a = 1 \cdot a = \frac{a}{1}$, und $\frac{a}{a} = 1$.

§. 3.

Mehrere Größen neben einander gesetzt, oder mit dem Multiplicationszeichen verbunden, bedeuten die Factoren von dem Producte dieser Größen, dabey es auf ihre Ordnung nicht ankommt.

So ist $a \cdot b \cdot c \cdot d = abcd = acdb$ ꝛc. Daher ist $3a \cdot 4b = 3 \cdot 4 \cdot a \cdot b = 12 \cdot ab$.

§. 4.

Brüche mit Buchstaben ausgedrückt werden nach den gemeinen Regeln multiplicirt und dividirt; aufgehoben und gleichnamig gemacht.

So ist $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, und $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$. Auch sind die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$, unter einerley

Benen-

Benennung gebracht, den Brüchen $\frac{ad}{bd}$ und $\frac{bc}{bd}$ gleich. Daher ist auch $\frac{12 \cdot ab}{4 \cdot b} = 3 \cdot a$.

§. 5.

Sind Größen durch das Additions- oder Subtractionszeichen verbunden, so zeigt dies ihre Summe oder Differenz an.

So ist $a + b$ die Summe der Größen, die man zu einander addiren soll, und $a - b$ die Differenz der Größen, die von einander subtrahirt werden sollen. Daher ist $a + a = 2a$, und $3a + 5a = 8a$, und $7a - 4a = 3a$. Eben so ist $\frac{a}{b} \mp \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \mp \frac{bc}{bd} = \frac{ad \mp bc}{bd}$.

§. 6.

Summen oder Differenzen, welche man mit einander multipliciren, oder dividiren soll, werden durch einen darüber gezogenen Strich verbunden, oder in eine Parenthese eingeschlossen.

So heißt $\overline{a + b} \cdot \overline{a - b}$, oder $(a + b)(a - b)$ das Product der Differenz beyder Größen in ihre Summe; und $\overline{a + b} : \overline{a - b}$, oder $(a + b) : (a - b)$, oder $\frac{a + b}{a - b}$ der Quotient der Differenz beyder Größen in ihre Summe. Demnach ist $3a + 5a = (3 + 5) a = 8a$, oder allgemein $mx + nx = (m + n) x$; und $\frac{mx + nx}{m + n} = \frac{(m + n) x}{m + n} = x$.

§. 7.

Wird eine Größe mehrmal in sich selbst multiplicirt, so heißt das daher entstehende Product eine Potenz der Größe von dem Grade, welchen der Exponent, das ist, die Anzahl der Factoren, anzeigt; die

die Größe selbst heißt eine Wurzel von eben dem Grade aus diesem Producte, und wird durch r mit eingeschriebenen Exponenten bezeichnet. I. §. 35.

So ist $aaaa = a^4$, und $\sqrt[4]{A} = a$, wenn $a^4 = A$ ist. Oder allgemein $a^n = Z$, wenn Z ein Product aus Factoren a von der Anzahl n ist; folglich $\sqrt[n]{Z} = a$, wenn $a^n = Z$ ist.

§. 8.

Die Summen und Differenzen von Potenzen und Wurzeln, werden, wenn die Größen selbst und ihre Exponenten gleich sind, wie bey gemeinen Grössen abgekürzt. §. 5.

So ist $a^3 + a^3 = 2 \,.\, a^3$, und $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x} = 2\sqrt[4]{x}$. Folglich $3\,a^3 + 5\,a^3 = (3 + 5)\,a^3 = 8\,a^3$, und $3\sqrt{x} + 4\sqrt{x} = 7\sqrt{x}$. So auch $9\,a^2 - 5\,a^2 = 4\,a^2$, und $7\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[3]{x} = 3\sqrt[3]{x}$.

Hingegen $5\,a^4 \mp 3\,b^4$, und $2\,a^3 \mp 5\,a^2$, und $5\sqrt{x} \mp 3\sqrt{y}$, und $7\sqrt[3]{x} \mp 4\sqrt[5]{x}$, können nicht abgekürzt werden, weil entweder die Größen selbst, oder die Exponenten ungleich sind, folglich als Dinge von verschiedner Art weder zusammengezählt, noch von einander weggenommen werden können.

§. 9.

Das Product oder der Quotient zweyer Potenzen einer Größe, ist eine Potenz dieser Größe, deren Exponent im ersten Falle die Summe, im zweyten die Differenz der gegebenen Exponenten ist.

So

So ist $a^2 . a^3 = aa . aaa = a^5 = a^{2+3}$, und $\frac{a^5}{a^2} = \frac{aaaaa}{aa} = aaa = a^3 = a^{5-2}$; oder allgemein $a^m . a^n = a^{m+n}$, und $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. Daher ist auch $a^2 x^3 . a^4 x^2 = a^2 . a^4 . x^3 . x^2 = a^6 . x^5$, und $\frac{a^5 x^4}{a^3 x^2} = \frac{a^5}{a^3} . \frac{x^4}{x^2} = a^2 x^2$.

§. 10.

Jede Potenz, deren Exponent 1, ist ihrer Wurzel gleich; jede Potenz, deren Exponent 0, ist der Einheit gleich; und jede Potenz, deren Exponent negativ, ist einem Bruche gleich, dessen Zähler die Einheit, und dessen Nenner dieselbe Potenz mit dem positiven Exponenten ist.

Denn $\frac{x^3}{x^2} = x^1 = x$; und $\frac{x^3}{x^3} = x^0 = 1$; und $\frac{x^2}{x^5} = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$, oder allgemein $x^{-n} = x^{0-n} = \frac{x^0}{x^n} = \frac{1}{x^n}$. §. 9.

§. 11.

Die Potenz eines Products entsteht, wenn man jeden einzelnen Factor in dieselbe Potenz erhebt, und von diesen Potenzen das Product macht; die Wurzel eines Products entsteht, wenn man aus jedem einzel= Factor dieselbe Wurzel ziehet, und von diesen Wurzeln das Product macht.

So ist $(ab)^3 = ab . ab . ab = aaa . bbb = a^3 b^3$; und $\sqrt[3]{A . B} = \sqrt[3]{A} . \sqrt[3]{B} = ab$, wenn $a^3 = A$, und $b^3 = B$ ist. Oder allgemein $(abc)^n = a^n . b^n . c^n$; und $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} . \sqrt[n]{y}$. Daher ist auch

auch $(3a)^2 = 9a^2$; und $\sqrt{16A} = 4\sqrt{A} = 4a$, wenn $a^2 = A$ ist.

§. 12.

Die Potenz oder Wurzel eines Quotienten oder Bruchs, ist ein Bruch, dessen Zähler dieselbe Potenz oder Wurzel des gegebenen Zählers, und dessen Nenner dieselbe Potenz oder Wurzel des gegebenen Nenners ist.

So ist $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$; und $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \frac{a}{b}$, wenn $a^2 = A$, und $b^2 = B$ ist. Oder allgemein: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$; und $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$. Daher ist $\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$; und $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{\frac{ab^2}{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}$.

§. 13.

Potenzen werden zu höhern Graden erhoben, wenn man ihren Exponenten mit dem Exponenten des verlangten Grades multiplicirt.

So ist $(a^4)^3 = a^4 \cdot a^4 \cdot a^4 = a^{4+4+4} = a^{12} = a^{4 \cdot 3}$. Oder allgemein: $(a^m)^n = a^{mn}$. Daher ist auch $(x^2 \cdot y^3)^4 = x^8 \cdot y^{12}$. Oder allgemein $(x^m \cdot y^n)^s = x^{ms} \cdot y^{ns}$.

§. 14.

Aus einer Potenz wird die Wurzel von einem gegebenen Grade gezogen, wenn man ihren Exponenten mit dem gegebenen Wurzelexponenten dividirt.

So

So ist $\sqrt[3]{a^{12}} = a^{\frac{12}{3}} = a^4$, weil $(a^4)^3 = a^{12}$.

Oder allgemein $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$, weil $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^n = x^m$.

Folglich ist $\sqrt[s]{(x^m \cdot x^n)} = \sqrt[s]{x^m} \cdot \sqrt[s]{x^n} = x^{\frac{m}{s}} \cdot x^{\frac{n}{s}}$.

Zusatz. Daher entstehen Potenzen, deren Exponenten Brüche sind, welche das Wurzelzeichen auch entbehrlich machen.

So heißt z. E. $5^{\frac{2}{3}}$ die Cubikwurzel aus 5^2, das ist, aus 25; und $a^{\frac{1}{2}}$ die Quadratwurzel aus a. Daher ist auch $\sqrt{a^5} = a^{\frac{5}{2}} = a^{2\frac{1}{2}} = a^2 \sqrt{a}$; und $\sqrt[3]{a^{10}} = a^{\frac{10}{3}} = a^{3\frac{1}{3}} = a^3 \cdot \sqrt[3]{a}$. §. 9.

§. 15.

Wurzelgrößen werden unter einerley Benennung gebracht, wenn man sie in Potenzen mit gebrochenen Exponenten verwandelt, und diese Exponenten unter einerley Benennung bringt.

Statt $\sqrt[3]{a^2}$ und $\sqrt[4]{b^3}$ kommt $a^{\frac{2}{3}}$ und $b^{\frac{3}{4}}$, oder $a^{\frac{8}{12}}$ und $b^{\frac{9}{12}}$, das ist, $\sqrt[12]{a^8}$ und $\sqrt[12]{a^9}$; wodurch die Wurzeln einerley Exponenten erhalten haben.

Zusatz. Daher entsteht die kürzere Regel: Multiplicire den Exponenten jeder Größe mit dem Wurzelexponenten der andern; so giebt das Product beyder Wurzelexponenten den gemeinschaftlichen Wurzelexponenten. So erhält man statt $\sqrt[r]{a^m}$ und $\sqrt[s]{a^n}$ die gleichnamigen Wurzeln $\sqrt[rs]{a^{ms}}$ und $\sqrt[rs]{a^{nr}}$.

II. Natur entgegengesetzter Größen.

§. 16.

Größen heißen entgegengesetzt, wenn sie, so wie Vermögen und Schuld, einander ganz oder zum Theil aufheben; und zwar heißt die eine, als Vermögen, positiv, die andre, als Schuld, negativ. Die positiven bezeichnet man mit dem Additions- die negativen mit dem Subtractionszeichen. Bey einer einzeln Größe, oder bey der erstern unter mehrern, wird, wenn sie positiv ist, das Zeichen weggelassen.

§. 17.

Die Einheit, welche sowohl positiv als negativ seyn könnte, nimmt man stets als positiv an.

Ist die Einheit positiv, so entstehen alle positive Zahlen aus dem Vielfachen der positiven Einheit; alle negativen Zahlen aber aus dem Vielfachen des der positiven Einheit Entgegengesetzten. Ist die Einheit negativ, so entstehen alle negativen Zahlen aus dem Vielfachen der negativen Einheit; alle positiven Zahlen aber aus dem Vielfachen, des der negativen Einheit Entgegengesetzten. Demnach ist es einerley, ob man die Einheit positiv oder negativ annehme; und man hat das erstere erwählet.

§. 18.

Größen mit einerley Zeichen vermehren einander; aber Größen mit verschiedenen Zeichen vermindern einander ganz oder nur zum Theil, je nachdem sie gleich oder ungleich sind.

So ist $+ 3a$ und $+ 2a = + 5a$, auch $- 3a$ und $- 2a = - 5a$; hingegen $+ a$ und $- a = 0$, aber $+ 5a$ und $- 3a = + 2a$, und $- 5a$ und $+ 3a = - 2a$; wodurch man abgekürzte Ausdrücke erhält.

II. Allgemeine Addition.

§. 18.

[illegible]

§. 19.

[illegible]

[illegible]

§. 21.

Sind die summirenden Größen [illegible], so setzt man ihre Summe, wenn sie einerley Zeichen, ihre Differenz aber, wenn sie verschiedene Zeichen haben. Letzter erhält [illegible] Zeichen, [illegible] Zeichen der Größern.

Soll + 3 a zu + 5 a, oder − 3 a zu − 5 a addirt werden, so erhält man im ersten Falle + 5 a + 3 a = + 8 a, im zweiten − 5 a − 3 a = − 8 a. Soll hingegen − 3 a zu + 5 a, oder + 3 a zu − 5 a addirt werden, so erhält man im ersten Falle 5 a − 3 a = + 2 a, im zweiten − 5 a + 3 a = − 2 a.

III. Allgemeine Addition.

§. 19.

Größen addiren heißt, sie zu einander setzen, und den zusammengesetzten Ausdruck, so viel es sich thun läßt, abkürzen.

§. 20.

Sind die summirenden Größen von verschiedener Art, so lassen sie sich blos zu eiander setzen, ohne daß der Ausdruck abgekürzt werden könnte.

Soll $+ 3b$ zu $+ 5a$ addirt werden, so erhält man $+ 5a + 3b$, soll man aber $- 3b$ addiren, so erhält man $+ 5a - 3b$.

Zusatz. Um Zweydeutigkeit zu vermeiden, schließt man den Addendus in eine Parenthese ein. So heißt das vorige Beyspiel $+ 5a + (+ 3b) = 5a + 3b$, und $5a + (- 3b) = 5a - 3b$; wobey das Zeichen der Addition von dem Zeichen einer positiven Größe unterschieden ist. Hiernach ist auch $a + (b - c) = a + b - c$.

§. 21.

Sind die summirenden Größen von einerley Art, so suche man ihre Summe, wenn sie einerley Zeichen; ihre Differenz aber, wenn sie verschiedene Zeichen haben. Erstre erhält das gemeinschaftliche Zeichen, letztre das Zeichen des Größern.

Soll $+ 3a$ zu $+ 5a$, oder $- 3a$ zu $- 5a$ addirt werden, so erhält man im ersten Falle $+ 5a + 3a = + 8a$, im zweyten $- 5a - 3a = - 8a$. Soll hingegen $- 3a$ zu $+ 5a$, oder $+ 3a$ zu $- 5a$ addirt werden, so erhält man im ersten Falle $5a - 3a = + 2a$; im zweyten $- 5a + 3a = - 2a$.

§. 22.

Bey zusammengesetzten Ausdrücken setzt man die Größen einerley Art unter einander und verfährt nach obigen Regeln. Z. E.

$$\begin{array}{l} 3a - 4b^2 - 5\sqrt[3]{c} + 6\frac{d}{e} + 2f - 3\sqrt{x} + 5y^3 \\ -5a - 7b^2 + 9\sqrt[3]{c} + 2\frac{d}{e} - 4g + 8\sqrt[3]{x} - 4y^2 \\ \hline -2a - 11b^2 + 4\sqrt[3]{c} + 8\frac{d}{e} + 2f - 3\sqrt{x} + 5y^3 \\ \quad - 4g + 8\sqrt[3]{x} - 4y^2. \end{array}$$

§. 23.

Hieraus erhellet auch, wie man Potenzen von negativen oder entgegengesetzten Exponenten mit einander multipliciren müsse. §. 9.

Z. E. $a^{-3} \cdot a^{-2} = a^{-5}$, und $a^7 \cdot a^{-4} = a^3$.

IV. Allgemeine Subtraction.

§. 24.

Größen subtrahiren heißt, sie von einander wegnehmen, welches geschiehet, indem man das Entgegengesetzte des Subtrahendus zu dem Minuendus nach §. 19. addirt.

Soll eine Größe b von einer andern a subtrahirt, das ist, von ihr weggenommen werden: so kann man sich die andre als ein Aggregat von ihr selbst und der ersten Größe, positiv und negativ genommen, das ist, $a = a + b - b$, gedenken. Wird nun $+b$ weggenommen, so bleibt $a - b$; wird $-b$ weggenommen, so bleibt $a + b$. Demnach wird von a eine Größe $+b$ oder $-b$ subtrahirt, wenn man zu a in jedem Falle das Entgegengesetzte von b addirt.

§. 25.

Sind die Größen von verschiedener Art, so kann man blos das Entgegengesetzte des Subtrahendus zu dem Minuendus setzen, ohne daß sich der Ausdruck abkürzen ließe.

Soll $+ 3b$ von $+ 5a$ subtrahirt werden, so erhält man $5a - 3b$; soll man aber $- 3b$ subtrahiren, so erhält man $5a + 3b$.

Zusatz. Um Zweydeutigkeit zu vermeiden, schließt man den Subtrahendus in eine Parenthese ein. So heißt das vorige Beyspiel $5a - (+ 3b) = 5a - 3b$, und $5a - (- 3b) = 5a + 3b$; wobey das Zeichen der Subtraction von dem Zeichen einer negativen Größe noch unterschieden ist. Hiernach ist auch $a - (b + c) = a - b - c$, aber $a - (b - c) = a - b + c$.

§. 26.

Sind die Größen von einerley Art, so läßt sich der zusammengesetzte Ausdruck abkürzen.

So ist $5a - (+ 3a) = 5a - 3a = 2a$, und $5a - (- 3a) = 5a + 3a = 8a$.

§. 27.

Bey zusammengesetzten Ausdrücken setze man, was von einerley Art ist, unter einander, und addire die Größen der untern Reihe mit ihren entgegengesetzten Zeichen zu den Obern. §. 22. Z. E.

$$3a - 4b^2 - 5\sqrt[3]{c} + 6\frac{d}{e} + 2f - 3\sqrt{x} + 5y^3$$

$$- 5a - 7b^2 + 9\sqrt[3]{c} + 2\frac{d}{e} - 4g + 8\sqrt[3]{x} - 4y^2$$

$$8a + 3b^2 - 14\sqrt[3]{c} + 4\frac{d}{e} + 2f - 3\sqrt{x}$$

$$+ 5y^3 + 4g - 8\sqrt[3]{x} + 4y^2.$$

§. 28.

Hieraus erhellet auch, wie man Potenzen von negativen oder entgegengesetzten Exponenten mit einander dividiren müsse.

Z. E. $\frac{a^{-4}}{a^{-6}} = a^2$, und $\frac{a^{-4}}{a^6} = a^{-10}$. §. 9. 19.

V. Allgemeine Multiplication.

§. 29.

Größen multipliciren heißt eine Größe finden, welche aus dem einen Factor eben so entsteht, als der andre Factor aus der Einheit. Daher erhält das Product, wenn die Factoren einerley Zeichen haben, das positive Zeichen; wenn sie verschiedene Zeichen haben, das negative Zeichen.

Hiernach wäre z. E. $+3 \cdot +4 = +12$, und $-3 \cdot -4 = +12$; hingegen $+3 \cdot -4 = -12$, und $-3 \cdot +4 = -12$. Denn da die Einheit stets positiv ist, so ist

1) $+1 : +3 = +4 : +12$, das ist, das Positive zum Positiven, wie das Positive zum Positiven. Oder addirt man $+1$ dreymal zu sich selbst, so entsteht $+3$; addirt man $+4$ dreymal zu sich selbst, so entsteht $+12$. Demnach ist $+12$ aus $+4$ eben so entstanden, als $+3$ aus $+1$. Folglich ist $+3 \cdot +4 = +12$, oder allgemein $+a \cdot +b = +ab$.

2) $+1 : -3 = -4 : +12$, das ist, das Positive zu seinem Entgegengesetzten, wie das Negative zu seinem Entgegengesetzten. Oder, addirt man das Entgegengesetzte von $+1$, das ist -1 dreymal zu sich selbst, so entsteht -3, addirt man das Entgegengesetzte von -4, das ist $+4$ dreymal zu sich selbst, so entsteht $+12$.

Dem-

Demnach entsteht + 12 aus — 4 eben so, als — 3 aus + 1. Folglich ist $-3 \cdot -4 = +12$, oder allgemein $-a \cdot -b = +ab$.

3) $+1 : +3 = -4 : -12$, aus ähnlichen Gründen. Daher ist $+3 \cdot -4 = -12$, oder allgemein $+a \cdot -b = -ab$.

4) $+1 : -3 = +4 : -12$, aus ähnlichen Gründen. Daher ist $-3 \cdot +4 = -12$, oder allgemein $-a \cdot +b = -ab$.

§. 30.

Sollen zusammengesetzte Größen multiplicirt werden, so ist das gesammte Product die Summe der einzelnen Producte aus dem Multiplicandus in jeden Theil des Multiplicators.

So ist $(a+b)\,c = c\,(a+b) = ac + bc$, folglich $(a+b)(c+d) = (a+b)\,c + (a+b)\,d$.

Man setze daher die gegebenen Factoren unter einander, multiplicire den ersten Factor nach und nach mit jedem Theile des andern, und addire die gefundenen Producte. Z. E.

$$\begin{array}{l} y^2 + 2ay - \tfrac{1}{2}a^2 \\ \underline{y^2 - 2ay + a^2} \\ y^4 + 2ay^3 - \tfrac{1}{2}a^2y^2 = (y^2 + 2ay - \tfrac{1}{2}a^2) \cdot y^2 \\ \quad - 2ay^3 - 4a^2y^2 + a^3y = (y^2 + 2ay - \tfrac{1}{2}a^2) \cdot (-2ay) \\ \qquad + a^2y^2 + 2a^3y - \tfrac{1}{2}a^4 = (y^2 + 2ay - \tfrac{1}{2}a^2) \cdot a^2 \\ \hline y^4 \qquad - 3\tfrac{1}{2} \cdot a^2y^2 + 3a^3y - \tfrac{1}{2}a^4 \end{array}$$

§. 31.

Ein aus verschiedenen Potenzen zweyer Größen zusammengesetztes Product wird geordnet, wenn die einzelnen Glieder so neben einander gestellet werden,

wie sie bey der einen Größe nach der Zunahme, bey der andern nach der Abnahme ihrer Exponenten auf einander folgen, wobey man die fehlenden Stellen mit einem (*) zu bezeichnen pflegt.

So ist das vorher gefundene Product §. 30. nach den Potenzen der y und a geordnet: $y^4 * - \frac{7}{2} a^2 y^2 + 3 a^3 y - \frac{1}{2} a^4$, wo die Exponenten von y ab, und die Exponenten von a zunehmen.

§. 32.

Hieraus erhellet auch, wie man Potenzen zu höhern Graden erheben müsse, wenn die gegebenen Exponenten negativ oder entgegen gesetzt sind.

So ist $(a^{-2})^3 = a^{-6}$, oder $(a^2)^{-3} = a^{-6}$; hingegen $(a^{-2})^{-3} = a^6$, so wie $(a^2)^3 = a^6$, §. 13. 29.

VI. Allgemeine Division.

§. 33.

Größen dividiren heißt eine Größe finden, welche aus dem Dividendus eben so entsteht, als die Einheit aus dem Divisor. Daher erhält der Quotient, wenn die gegebnen Größen einerley Zeichen haben, das positive Zeichen; wenn sie verschiedne Zeichen haben, das negative Zeichen.

Hiernach wäre z. E. $\frac{+12}{+3} = +4$, und $\frac{-12}{-3} = +4$; hingegen $\frac{-12}{+3} = -4$, und $\frac{+12}{-3} = -4$. Denn da die Einheit durchgängig positiv angenommen wird, so ist

1) $+3 : +1 = +12 : +4$, das ist, das Positive zum Positiven, wie das Positive zum Positiven. Oder

Oder, theilt man die $+3$ in drey Theile, so ist ein solcher Theil $+1$; theilt man $+12$ in drey Theile, so ist ein solcher Theil $+4$. Demnach entsteht $+4$ aus $+12$ eben so, als $+1$ aus $+3$. Folglich ist $\frac{+12}{+3} = +4$, oder allgemein $\frac{+ab}{+a} = +b$.

2) $-3 : +1 = -12 : +4$, das ist, das Negative zu seinem Entgegengesetzten, wie das Negative zu seinem Entgegengesetzten. Oder, theilt man das Entgegengesetzte von -3, das ist $+3$ in drey Theile, so entsteht $+1$; theilt man das Entgegengesetzte von -12, das ist $+12$ in drey Theile, so entsteht $+4$. Demnach ist $+4$ aus -12 eben so entstanden, als $+1$ aus -3. Folglich ist $\frac{-12}{-3} = +4$, oder allgemein $\frac{-ab}{-a} = +b$.

3) $+3 : +1 = -12 : -4$, aus ähnlichen Gründen. Daher ist $\frac{-12}{+3} = -4$, oder allgemein $\frac{-ab}{+a} = -b$.

4) $-3 : +1 = +12 : -4$, aus ähnlichen Gründen. Daher ist $\frac{+12}{-3} = -4$, oder allgemein $\frac{+ab}{-a} = -b$.

§. 34.

Sollen zusammengesetzte Größen dividirt werden, so ist der gesamte Quotient, die Summe der einzelnen Quotienten des Divisors in die ihm zugehörigen Theile des Dividendus.

So ist $\frac{ab+ac}{a} = \frac{ab}{a} + \frac{ac}{a} = b + c$, folglich $\frac{ac+bc+ad+bd}{a+b} = \frac{ac+bc}{a+b} + \frac{ad+bd}{a+b} = c + d$. Man ordne daher den gegebnen Dividendus

dus nach den Theilen des Divisors §. 31. und suche die einzelnen Quotienten. Z. E.

$$
\begin{array}{l}
a - b)\ a^3 - a^2b + 2a^2c - 3abc + b^2c \,|\, a^2 + 2ac - bc \\
\quad a^3 - a^2b \\
\quad \overline{\ 0 \quad 0\ } \\
\qquad\qquad + 2a^2c - 3abc \\
\qquad\qquad + 2a^2c - 2abc \\
\qquad\qquad \overline{\ 0 \quad - abc + b^2c\ } \\
\qquad\qquad\qquad - abc + b^2c \\
\qquad\qquad\qquad \overline{\ 0 \quad 0\ }
\end{array}
$$

§. 35.

Ist der Divisor kein Factor des Dividendus, so erhält der Quotient die Form eines Bruchs; oder kann durch eine Reihe von Brüchen ohne Ende dargestellt werden.

Sollte z. E. a mit $b + c$ dividirt werden, so wäre der Quotient $\frac{a}{b+c}$. Nach der Analogie aber kann man auch folgendermaßen verfahren:

$$
\begin{array}{l}
b + c)\ a \quad \Big|\ \frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} - \frac{ac^3}{b^4} \ldots \\
\quad a + \frac{ac}{b} \\
\quad \overline{\ 0 - \frac{ac}{b}\ } \\
\qquad - \frac{ac}{b} - \frac{ac^2}{b^2} \\
\qquad \overline{\ 0 + \frac{ac^2}{b^2}\ } \\
\qquad\quad + \frac{ac^2}{b^2} + \frac{ac^3}{b^3} \\
\qquad\quad \overline{\ 0 - \frac{ac^3}{b^3}\ } \text{ u. s. w.}
\end{array}
$$

§. 36.

Hieraus erhellet auch, wie man aus Potenzen Wurzeln ziehen müsse, wenn die gegebnen Exponenten negativ oder entgegen gesetzt sind.

So ist $\sqrt{a^{-3}} = a^{-\frac{3}{2}} = a^{-\frac{3}{2}}$, und $\sqrt[-2]{a^3} = a^{-\frac{3}{2}} = a^{-\frac{3}{2}}$; hingegen $\sqrt[-2]{a^{-3}} = a^{\frac{-3}{-2}} = a^{+\frac{3}{2}}$. §. 14. 33.

VII. Allgemeines Potenziren.

§. 37.

Eine Größe, die aus zwey Theilen besteht, welche durch Addition oder Subtraction mit einander verbunden sind, heißt ein Binomium. Die Potenz eines Binomiums ist ein Product, worinn das Binomium als Factor so vielmal vorkommt, als der Exponent dieser Potenz Einheiten enthält.

So entsteht die zweyte, dritte, vierte Potenz, und so weiter alle übrige Potenzen von $a + b$ oder von $a - b$ auf folgende Art:

$a + b$	$a - b$
$a + b$	$a - b$
II. $a^2 + 2ab + b^2$	II. $a^2 - 2ab + b^2$
$a + b$	$a - b$
III. $a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$	III. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$a + b$	$a - b$
IV. $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2$	IV. $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2$
$+ 4ab^3 + b^4$	$- 4ab^3 + b^4$
u. s. w.	u. s. w.

§. 38.

§. 38.

Eine Größe, die aus mehr als zwey mit einander verbundnen Theilen besteht, heißt ein Multinomium. Ihre Potenzen entstehen auf eben die Art. Z. E.

$$\begin{array}{l} a+b+c \\ a+b+c \\ \hline a^2+ab+ac \\ \quad +ab \quad +b^2+bc \\ \quad\quad +ac \quad +bc+c^2 \\ \hline \text{II. } a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2 \\ \quad\quad\quad\quad a+b+c \\ \hline a^3+2a^2b+2a^2c+ab^2+2abc+ac^2 \\ \quad +a^2b \quad +2ab^2+2abc \quad +b^3+2b^2c+bc^2 \\ \quad\quad +a^2c \quad +2abc+2ac^2 \quad +b^2c+2bc^2+c^3 \\ \hline \text{III. } a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6abc+3ac^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3 \end{array}$$

u. s. w.

§. 39.

Jede Potenz einer multinomischen Größe läßt sich auch nach der Potenz eines Binomiums formiren, wenn man die erstern Theile der multinomischen Größe als den ersten, den letzten aber als den zweyten Theil des Binomiums ansieht. Z. E.

I. $(a+b+c)^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$, das ist,

$$\begin{array}{lcl} (a+b)^2 & = & a^2+2ab+b^2 \\ 2(a+b)c & = & \quad\quad\quad\quad 2ac+2bc \\ c^2 & = & \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad c^2 \\ \hline (a+b+c)^2 & = & a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2 \end{array}$$

II. $(a+b+c)^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2c + 3c^2(a+b) + c^3$, das ist,

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$$
$$3c(a+b)^2 = 3c(a^2+2ab+b^2) = 3a^2c + 6abc + 3b^2c$$
$$3c^2(a+b) = 3c^2a + 3c^2b$$
$$c^3 = c^3$$

$$(a+b+c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3c^2a + 3c^2b + c^3$$

u. s. w.

§. 40.

Die Binomische Regel, oder kurz das Binomium, ist eine allgemeine Formel für jede Potenz n einer binomischen Größe $a+b$; nach welcher $(a+b)^n =$

$$a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n.n-1}{1.2}a^{n-2}b^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}a^{n-3}b^3 \ldots$$

Auf dem vorher angezeigten Wege lassen sich alle Potenzen einer binomischen oder multinomischen Größe, eine aus der andern herleiten. Weil aber hiebey jede höhere Potenz die vorhergehende, und daher alle vorhergehenden voraus setzt, so entstand die Frage: ob man nicht jede Potenz einer zusammengesetzten Größe auch außer der Ordnung ohne Hülfe der vorhergehenden finden könne? Man fand auch aus Betrachtung der möglichen Versetzungen und Verbindungen mehrerer Dinge, oder durch die Lehre von der Permutation und Combination, das Gesetz, welches man beym Potenziren befolgen mußte, und leitete hieraus Regeln, die zu solchem Endzweck führten. Diese Regeln schränkte man auf binomische Grössen ein, auf welche sich auch die multinomischen zurückführen lassen §. 39: und so entstand die oben angezeigte binomische Formel, von deren Richtigkeit man sich vorläufig durch Vergleichung mit §. 37 versichern kann.

Zusatz.

Zusatz. Statt dieser Formel können auch zwey andere, die erste für positive, die zweyte für negative Exponenten, gebraucht werden. Denn es ist auch

$$1)\ (a+b)^n =$$

$$a^n\left(1+\frac{n}{1}\cdot\frac{b}{a}+\frac{n.n-1}{1.2}\cdot\frac{b^2}{a^2}+\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\cdot\frac{b^3}{a^3}\cdots\right)$$

$$2)\ (a+v)^n =$$

$$a^n\left(1+\frac{n}{1}\cdot\frac{v}{a+v}+\frac{n.n+1}{1.2}\cdot\frac{v^2}{(a+v)^2}+\frac{n.n+1.n+2}{1.2.3}\cdot\frac{v^3}{(a+v)^3}\cdots\right)$$

VIII. Allgemeines Extrahiren.

§. 41.

Die Quadratwurzel aus einer zusammengesetzten Größe extrahirt man nach der Formel §. 37. $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, wenn man die Wurzel a aus der höchsten Potenz a^2 als den ersten Theil der gesuchten Wurzel ansieht, durch die Division mit $2a$ den zweyten Theil b sucht, und $(2a+b)\,b$ subtrahirt. Siehet man alsdenn die gefundenen beyden Theile als den ersten an, so findet man auf eben die Art durch die Division mit $2(a+b)$ den dritten Theil c, u. s. w.

Die Art der Operation läßt sich am kürzesten in Beyspielen zeigen, wie folgt

I. $\sqrt{(x^2+mx+\frac{1}{4}m^2)} = x+\frac{1}{2}m.$ Denn

$$\begin{array}{r|l}
x^2+mx+\frac{1}{4}m^2 & x+\frac{1}{2}m \\
x^2 \qquad\qquad\quad & \\
\hline
2x)\ 0+mx+\frac{1}{4}m^2 & \\
+mx+\frac{1}{4}m^2 & \\
\hline
0 \quad\ 0 &
\end{array}$$

II. $\sqrt{}(x^2 + mx + \frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{2}nx + \frac{1}{4}nm + \frac{1}{16}n^2)$
$= x + \frac{1}{2}m + \frac{1}{4}n$. Denn

$$\begin{array}{llllllll|l}
 & x^2 & + mx & + \frac{1}{4}m^2 & + \frac{1}{2}nx & + \frac{1}{4}nm & + \frac{1}{16}n^2 & & x + \frac{1}{2}m + \frac{1}{4}n \\
 & x^2 & & & & & & & \\
2x) & 0 & + mx & + \frac{1}{4}m^2 & & & & & \\
 & & + mx & + \frac{1}{4}m^2 & & & & & \\
2x+m) & 0 & & 0 & + \frac{1}{2}nx & + \frac{1}{4}nm & + \frac{1}{16}n^2 & & \\
 & & & & + \frac{1}{2}nx & + \frac{1}{4}nm & + \frac{1}{16}n^2 & & \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & &
\end{array}$$

§. 42.

Die Cubikwurzeln, und so auch die folgenden Wurzeln könnten nach den dazu gehörigen Potenzen des Binomiums $(a + b)$ §. 47. auf eben diesem Wege extrahirt werden; aber die Rechnung ist weitläuftig und beschwerlich. Dagegen kann die Binomische Formel §. 40. für jede Wurzel gebraucht werden, wenn man darinn statt n, den zu der verlangten Wurzel nach §. 14. gehörigen Bruch setzt. Auch wird im Folgenden gezeigt werden, wie man hiezu logarithmische Rechnungen anwenden kann.

IX. Irrationalgrößen.

§. 43.

Jede Potenz einer ganzen Zahl ist eine ganze Zahl; und jede Potenz eines eigentlichen Bruchs ist ein eigentlicher Bruch.

Ist a eine ganze Zahl, so ist offenbar $a^n = aaaa \ldots$ auch eine ganze Zahl. Ist $\frac{a}{b}$ ein ächter Bruch, wo $a < b$, folglich $a^n < b^n$, so ist offenbar $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

auch

auch ein ächter Bruch. Ist $\frac{a}{b}$ ein unächter aber eigentlicher Bruch, dessen Zähler und Nenner Producte aus ungleichen Primzahlen sind, so daß $\frac{a}{b} = \frac{c.d.e....}{f.g.h....}$: so ist offenbar $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{c^n.d^n.e^n...}{f^n.g^n.h^n...}$, folglich ein Bruch, wo jeder einfache Factor im Zähler und Nenner, bey der zweyten Potenz zweymal, bey der dritten dreymal, bey der $n$ten $n$mal vorkommt, ohne daß jemals einige Factoren des Nenners, vielweniger alle, in den Factoren des Zählers aufgingen. Demnach wird $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ niemals eine ganze Zahl werden, sondern, weil $a^n > b^n$, immer ein unächter, aber eigentlicher, Bruch bleiben.

§. 44.

Ist die Wurzel einer ganzen Zahl größer als eine ganze Zahl x, aber kleiner als diese ganze mit der Einheit vermehrt, $x + 1$: so ist solche Wurzel weder eine ganze Zahl, noch ein Bruch, und heißt eine Irrationalgröße, die sich durch gar keine Zahl genau ausdrucken läßt, und weder die Einheit, noch irgend einen Theil der Einheit zum Maaße hat. I. §. 21.

Da diese Wurzel $> x$ und $< x + 1$, also zwischen x und $x + 1$ fällt, so kann sie offenbar keine ganze Zahl seyn. Wäre sie nun ein Bruch, so müßte die Potenz dieses Bruchs, die mit der Wurzel gleichen Exponenten hat, der gegebenen Zahl gleich, und daher eine ganze Zahl seyn, welches nach §. 43. unmöglich ist. Demnach ist sie irrational. So ist z. E. $\sqrt{5} > 2$ und < 3, folglich irrational.

§. 45.

Alle solche Irrationalgrößen werden mit dem Wurzelzeichen belegt; aber nicht alle Wurzelgrößen, sondern nur diejenigen sind irrational, die sich nicht von dem Wurzelzeichen befreyen lassen, das ist, aus denen die verlangte Wurzel nicht genau gezogen werden kann.

Daher ist a, $\sqrt[3]{a^3}$, $\sqrt[n]{a^n}$, es sey nun a eine ganze Zahl oder ein Bruch, rational; aber $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{(a+b)}$ so lange irrational, bis für a, und $a+b$ solche Zahlen gesetzt werden können, aus denen sich die verlangte Wurzel genau ziehen läßt.

§. 46.

Ist das Quadrat einer Irrationalgröße rational: so sind alle gerade Potenzen derselben auch rational; alle ungerade aber irrational.

Es sey a rational, und $\sqrt{a}$ oder $a^{\frac{1}{2}}$ irrational, auch bedeute n eine ganze Zahl, folglich $2n$ eine gerade, und $2n+1$ eine ungerade Zahl: so ist $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a$, folglich rational, und $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{2n} = a^n$, folglich rational; hingegen $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{2n+1} = a^n \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^n \cdot \sqrt{a}$, folglich irrational.

§. 47.

Läßt sich eine Größe, deren Wurzel irrational ist, in Factoren zerlegen, so daß sich aus irgend einem solcher Factoren die gegebene Wurzel genau ziehen läßt: so kann man den Ausdruck von seiner Irrationalität zum Theil befreyen.

So ist $\sqrt{28} = \sqrt{(4 \cdot 7)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$, und $\sqrt{63} = \sqrt{(9 \cdot 7)} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$. Daher ist $\sqrt{63} \mp \sqrt{28} = 3\sqrt{7} \mp 2\sqrt{7} = (3 \mp 2) \cdot \sqrt{7}$.

Eben so ist $\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{8 \cdot 5} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{5} = 2\sqrt[3]{5}$, und $\sqrt[3]{2560} = \sqrt[3]{512 \cdot 5} = \sqrt[3]{512} \cdot \sqrt[3]{5} = 8 \cdot \sqrt[3]{5}$. Daher ist $\sqrt[3]{2560} \mp \sqrt[3]{40} = 8\sqrt[3]{5} \mp 2\sqrt[3]{5} = (8 \mp 2) \cdot \sqrt[3]{5}$.

X. Unmögliche oder eingebildete Größen.

§. 48.

Von jeder positiven Größe sind alle Potenzen positive Größen; von jeder negativen Größe aber sind alle gerade Potenzen positive, alle ungerade negative Größen.

Bey der zweyten und dritten Potenz ist der Satz an sich klar. §. 29. Jede andre gerade Potenz kann als ein Product von Quadratgrößen, das ist, von lauter positiven Factoren angesehen werden, und giebt daher ein positives Product. Jede andre ungerade Potenz kann als ein Product von Quadratgrößen in die Wurzelgröße angesehen werden, und ist daher bey positiven Wurzelgrößen positiv, bey negativen aber negativ; weil im ersten Falle beyde Factoren positiv sind, im zweyten Falle aber der eine positiv, der andre negativ ist. §. 29.

§. 49.

Jede gerade Wurzel aus einer positiven Größe kann sowohl positiv, als negativ seyn; jede ungerade Wurzel aber aus einer positiven Größe kann nur positiv, aus einer negativen nur negativ seyn; jede gerade

rade Wurzel hingegen aus einer negativen Größe kann weder positiv noch negativ seyn, und heißt daher unmöglich oder eingebildet.

Macht man von der Wurzel diejenige Potenz, welche der Exponent der Wurzel verlangt: so entsteht im ersten Falle allemal eine positive Größe, die Wurzel mag positiv oder negativ seyn; im zweyten Falle aber nur eine positive oder negative Größe, je nachdem die Wurzel positiv oder negativ ist; im dritten Falle hingegen niemals eine negative Größe, man mag die Wurzel positiv oder negativ nehmen. §. 48.

Zweytes Capitel.

Von den Zahlensystemen.

1. Natur der Zahlensysteme.

§. 50.

Eine allgemeine Form, unter welche jede auch noch so verschiedene Zahlenreihe gebracht werden kann, heißt eine allgemeine Zahlenreihe, dergleichen:

$hx^{+n}, \ldots dx^{+3}, cx^{+2}, bx^{+1}, ax^{0}, bx^{-1}, cx^{-2}, dx^{-3} \ldots hx^{-n}$

oder kürzer:

$$\overset{+n}{h} \ldots \overset{+3}{d}, \overset{+2}{c}, \overset{+1}{b}, \overset{0}{a}, \overset{-1}{b}, \overset{-2}{c}, \overset{-3}{d}, \ldots \overset{-n}{h}.$$

Diese Zahlenreihe entsteht, indem man eine unbestimmte Größe x, nach der Ordnung wie die positiven und negativen Exponenten von Null an zu beyden Seiten auf einander folgen, in ihre verschiedenen Potenzen erhebt, und solche mit unbestimmten einfachen Größen, a, b, c u. s. w. multiplicirt.

In der zweyten Form bedeuten daher die Buchstaben a, b, c, d u. s. w. die Anzahl der Einheiten bey jeder Potenz der gemeinschaftlichen Größe x; die überschriebnen Zahlen aber zeigen die Exponenten dieser Potenzen, oder die Ordnungen solcher Einheiten an; und zwar die positiven die höherern, die negativen die niedrern Ordnungen.

§. 51.

Giebt man in solcher allgemeinen Zahlenreihe der gemeinschaftlichen Größe x einen bestimmten Werth: so

so entsteht daraus, je nachdem dieser Werth verschieden ist, auch ein verschiedenes Zahlensystem; und solcher Werth der gemeinschaftlichen Größe x heißt alsdenn die Basis dieses Systems.

So giebt $x = 2$, die Diadik; $x = 4$, die Tetracdik; $x = 10$ das Decimalsystem oder die Decadik; $x = 12$, das Duodecimalsystem oder Dodecadik; $x = 60$, das Sexagesimalsystem. u. s. w.

II. Decadisches Zahlensystem.

§. 52.

Werden in einer Reihe neben einander gesetzter Ziffern, die einzelnen Ziffern als Producte derselben in die verschiednen Potenzen der Zahl Zehn angesehen: so gehört solche Reihe zu dem decadischen Zahlensystem. Z. E.

$$\begin{matrix} +4 & +3 & +2 & +1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 3 & 5 & 7 & 8 & 6 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{matrix}$$

§. 53.

Schneidet man in solcher Reihe die Ziffer, welche ihr Product in 10^0 bedeutet, durch ein Comma von den übrigen ab: so läßt sich der Werth einer jeden Ziffer bloß durch die Stelle bestimmen, die sie nach den Rechten oder Linken zu einnimmt, und das dabey gebrauchte Comma heißt alsdenn das Decimalzeichen. Hiedurch wird die Reihe §. 52. in diese gleich bedeutende verwandelt:

$$35786,4325$$

§. 54.

Bedeutet in dieser Reihe die durch das Decimalzeichen abgeschnittene Ziffer einfache oder primitive

Einheiten: so bedeuten die Ziffern nach der Linken zusammengesetzte Einheiten, oder Einheiten höherer Ordnungen; die nach der Rechten aber getheilte Einheiten, oder Einheiten niedrer Ordnungen, welche auch Decimalbrüche, deren Nenner eine Potenz der Zehn ist, genannt werden.

Hiernach heißen die Einheiten

höhere Ordnung	niedrere Ordnung
der 1sten. Zehner	Zehntel
2ten. Hunderte	Hundertel
3ten. Tausende	Tausendtel
4ten. Zehntausende	Zehntausendtel
5ten. Hunderttausende	Hunderttansendtel
6ten. Millionen	Milliontel
7ten. Zehnmillionen	Zehnmilliontel
12ten. Billionen.	Billiontel

u. s. w.

Denn da $x^0 = 10^0 = 1$, so bedeuten $\overset{0}{a}$ Einer, oder primitive Einheiten. Da $10^1 = 10$, so bedeuten $\overset{+1}{b}$ Zehner, oder Einheiten der ersten höhern Ordnung. Da $10^2 = 10 \,.\, 10 = 100$, so bedeuten $\overset{+2}{c}$ Hunderte, oder Einheiten der zweyten höhern Ordnung, u. s. w.

Eben so, da $10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10}$, so bedeuten $\overset{-1}{b}$ Zehntel, oder Einheiten der ersten niedrern Ordnung. Da $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$, so bedeuten $\overset{-2}{c}$ Hundertel, oder Einheiten der zweyten niedrern Ordnung, u. s. w.

§. 55.

Wird in einer solchen Reihe das Decimalzeichen nicht versetzt, so bleibt die Zahl unverändert, man mag

mag ihr vorn oder hinten so viel Nullen als man will beyfügen; wird aber das Decimalzeichen nach der Rechten oder Linken um 1, 2, 3, u. s. w. Stellen versetzt, so wird die Zahl 10, 100, 1000 u. s. w. mahl im ersten Falle vergrößert, im zweyten verkleinert.

Denn in solcher Reihe ist jede Ziffer nach der Linken zehnmal größer, als die nächst vorhergehende, so daß zehn Einheiten jeder vorhergehenden eine Einheit der nächst folgenden ausmachen. §. 53.

§. 56.

Eine solche Reihe Ziffern wird entweder nach dem Werthe jeder einzelnen Ziffer, oder nach dem Werthe der letzten Ziffer zur Rechten ausgesprochen.

Z. E. 325,0 heißt 3 Hunderte, 2 Zehner, 5 Einer, 0 Zehntel, das ist, dreyhundert fünf und zwanzig Ganze, kein Zehntel; oder dreytausend zweyhundert und funfzig Zehntel.

Eben so heißt 0,743 entweder 7 Zehntel, 4 Hundertel, 3 Tausendtel; oder siebenhundert drey und vierzig Tausendtel.

§. 57.

Die Addition und Subtraction ist bey den Decimalbrüchen, wie bey den ganzen Zahlen, I. §. 7. 10. wie an sich klar ist.

Ein Exempel der Addition sey:

$$\begin{array}{r} 357,6432 \\ 0,9785 \\ 38,0026 \\ \hline 396,6243 \end{array}$$

Ein Exempel der Subtraction sey:

$$\begin{array}{r} 5209,2027 \\ 2372,9534 \\ \hline 2836,2493 \end{array}$$

§. 58.

Die Multiplication geschiehet gleichfalls wie mit ganzen Zahlen I. §. 13, nur daß in dem gefundenen Producte so viel Stellen durch das Decimalzeichen abgeschnitten werden, als in beyden Factoren zusammen durch dasselbe abgeschnitten sind. Z. E.

$$\begin{array}{r} 35,7863 \\ 2,25 \\ \hline 1789315 \\ 715726 \\ 715726 \\ \hline 80,519175 \end{array}$$

Der Beweiß dieses Verfahrens läßt sich an einem solchen Beyspiele am leichtesten übersehen. Der Werth des ersten Factors, nach der letzten Ziffer zur Rechten bestimmt, ist $357863 . 10^{-4}$, des zweyten $225 . 10^{-2}$ §. 56. Folglich §. 23. das Product $= 357863 . 225 . 10^{-4} . 10^{-2} = 80519175 . 10^{-6} = 80,519175$. §. 53.

§. 59.

Die Division geschieht ebenfalls wie mit ganzen Zahlen I. §. 16, nur daß, je nachdem im Dividendus oder im Divisor mehrere Decimalstellen abgeschnitten sind, im ersten Falle in dem gefundenen Quotienten so viel Decimalstellen abgeschnitten worden, als der Ueberschuß im Dividendus beträgt; im zweyten Falle aber dem Quotienten so viele Nullen ange-

angehängt werden, als der Ueberschuß im Divisor beträgt. Z. E.

```
0,24)0,03264|0,136        0,024)326,4|13600
     24     |                    24  |
     --                          --
     86                          86
     72                          72
     ---                         ---
     144                         144
     144                         144
     ---                         ---
       0                           0
```

Der Beweiß ist eben so wie bey der Multiplication. Das erste Exempel ist

$$\frac{3264 \cdot 10^{-5}}{24 \cdot 10^{-2}} = \frac{3264}{24} 10^{-3} = 136 \cdot 10^{-3} = 0,136. \ \S. 28.$$

Das zweyte Exempel ist $\frac{3264 \cdot 10^{-1}}{24 \cdot 10^{-3}} = \frac{3264}{24} \cdot 10^{+2}$ $= 136 \cdot 10^{+2} = 13600$. §. 28. Wären daher im Divisor und Dividendus gleich viele Stellen abgeschnitten, so bliebe der Quotient ungeändert.

§. 60.

Durch Hülfe dieser Rechnungsart, läßt sich bey jeder Division, wobey ein Rest bleibt, der Quotient durch Decimalbrüche ausdrücken, wenn man dem Reste, nachdem man ihn mit dem Decimalzeichen belegt hat, so viel Nullen als man für nöthig findet, anhängt, und die Division fortsetzt. Z. E.

```
7) 34 |4,857 . . . .
   28 |
   ---
   6,0
   5 6
   ---
    40
    35
    --
    50
    49
    --
     1 u. s. w.
```

§. 61.

Dieser Vortheil findet auch beym Extrahiren der Wurzel statt, daß man einer Zahl, die mit dem Decimalzeichen belegt ist, nach Belieben Nullen beyfügt; nur muß bey Abtheilung solcher Zahl I. §. 39, der Strich durch das Decimalzeichen gehen, um hiernach den Werth der Wurzel zu bestimmen. Es werde z. E. $\sqrt{35,786}$ verlangt, so ist die Operation diese:

```
        35,|78|60|5,986 . . .
        25
10)     10 78
         9 81
118)      97 60
          89 44
1196)      8 16 00
           7 05 96
           1 10 04 u. s. w.
```

III. Sexagesimalsystem.

§. 62.

Eine Zahl, die man als ein Product derselben in eine Potenz der Zahl 60 ansiehet, ist eine Sexagesimalzahl; und insbesondre ein Sexagesimalbruch, wenn der Exponent einer solchen Potenz negativ ist.

§. 63.

Die Rechnungsarten mit Sexagesimalzahlen sind wie die mit benannten Zahlen, wobey man auch, wenn die gefundene Zahl Einheiten einer höhern Klasse in sich faßt, solche durch die Division mit der Zahl 60 reduciren muß; doch hat man, solche Reduction

zu

zu ersparen, auch eigene Tabellen, dergleichen in Hausens elem. math.

Ein Exempel der Addition sey:

+1	0	−1	−2
34	05	18	23
18	12	54	14
52	18	12	37

Ein Exempel der Subtraction sey:

+1	0	−1	−2
52	18	12	37
18	12	54	14
34	05	18	23.

Ein Exempel der Multiplication sey:

$$\overset{+1}{05} + \overset{0}{12} + \overset{-1}{04}$$

$$\overset{-1}{04} + \overset{-2}{03}$$

$$\overset{-1}{15} + \overset{-2}{36} + \overset{-3}{12}$$

$$\overset{0}{20} + 48 + 16$$

$$\overset{0}{21} + \overset{-1}{03} + \overset{-2}{53} + \overset{-3}{12}$$

Ein Exempel der Division sey:

$$\overset{-2}{16}) \; \overset{-1}{33} \,|\, \overset{+1}{02} + \overset{0}{03} + \overset{-1}{45}$$

$$\underline{32}$$

$$1 = \overset{-2}{60}$$

$$\underline{48}$$

$$12 = \overset{-3}{720}$$

$$\underline{720}$$

$$0$$

Drit-

Drittes Kapitel.

Von den Proportionen.

I. Natur der Proportion.

§. 64.

Zwey Größen sind überhaupt in einer Verhältniß, in so fern die eine aus der andern entstehen kann; insbesondre aber in einer arithmetischen Verhältniß, in so fern die eine aus der andern durch Addition oder Subtraction einer dritten Größe entstehet, und in einer geometrischen Verhältniß, in so fern die eine aus der andern durch Multiplication oder Division mit einer dritten Größe entstehet. Beyde Größen heißen die Glieder der Verhältniß, die erste das Vorderglied, die zweyte das Hinterglied. Der Verhältnißname ist bey der arithmetischen Verhältniß die Differenz, bey der geometrischen aber der Quotient der beyden Glieder. Daher bezeichnet man die arithmetische Verhältniß mit dem Subtractionszeichen, die geometrische aber mit dem Divisionszeichen. Hieße demnach das eine Glied der Verhältniß, was es auch für eine Größe wäre, a; der Name der arithmetischen Verhältniß, d, der geometrischen, m: so wäre die allgemeine Form der arithmetischen Verhältniß $a - (a + d)$ wobey d eine positive und negative Größe anzeigen kann; und die allgemeine Form einer geometrischen Verhältniß, die auch schlechtweg Verhältniß heißt, $a : ma$, wobey m eine jede ganze oder gebrochene Zahl, wie auch eine Irrationalzahl anzeigen kann. Ist letztres, so heißt die Verhältniß irrational.

§. 65.

§. 65.

Die Proportion ist die Gleichheit zweyer Verhältnisse, und wird aus der Gleichheit der Verhältnißnamen erkannt. Sie ist entweder arithmetisch oder geometrisch, je nachdem die Verhältnisse arithmetisch oder geometrisch sind. Die allgemeine Form einer arithmetischen Proportion ist $a - (a + d) = b - (b + d)$; die allgemeine Form einer geometrischen Proportion, die auch schlechtweg Proportion heißt, ist $a : ma = b : mb$.

§. 66.

Die Proportion heißt stetig, proportio continua, wenn die mittlern Glieder einerley sind; abgesondert aber, proportio discreta, wenn die mittlern Glieder verschieden sind. Die allgemeine Form der stetigen Proportion ist arithmetisch $a - (a + d) = (a + d) - (a + 2d)$, geometrisch $a : ma = ma : m^2 a$.

II. Natur der arithmetischen Proportion.

§. 67.

Die Summe der äußern Glieder ist, bey einer abgesonderten Proportion, der Summe der mittlern Glieder; bey einer stetigen Proportion aber, dem doppelten mittlern Gliede gleich.

Denn von der abgesonderten Proportion $a - (a + d) = b - (b + d)$ ist offenbar $a + b + d = a + d + b$; und von der stetigen Proportion $a - (a + d) = (a + d) - (a + 2d)$ ist offenbar $a + a + 2d = (a + d) + (a + d) = 2(a + d)$.

§. 68.

§. 68.

Das vierte Glied einer abgesonderten Proportion findet man, wenn man von der Summe der beyden mittlern das erste subtrahirt; das dritte Glied einer stetigen Proportion findet man, wenn man von dem doppelten mittlern Gliede das erste subtrahirt.

Denn wenn man von der Summe der mittlern Glieder $a + d + b$ das erste Glied a subtrahirt, so erhält man offenbar $b + d$ oder das vierte Glied; und wenn man von dem doppelten mittlern Gliede $2a + 2d$ das erste Glied a subtrahirt, so erhält man offenbar $a + 2d$ oder das dritte Glied.

§. 69.

Das mittlere Glied einer stetigen Proportion findet man, wenn man die Summe der äußern Glieder halbirt.

Denn wenn man die Summe der äußern Glieder $2a + 2d$ mit 2 dividirt, so erhält man offenbar $a + d$ oder das mittlere Glied, welches auch das arithmetische Mittel heißt.

§. 70.

Auf eine ähnliche Art, wie man das arithmetische Mittel findet, macht man im gemeinen Leben sowohl als in den Wissenschaften den Durchschnitt oder die Mittelzahl, wenn man die Summe mehrerer Größen mit ihrer Anzahl dividirt.

So ist z. E. von 3, 5, 7, 9, der Durchschnitt oder die Mittelzahl $\frac{3 + 5 + 7 + 9}{4} = \frac{24}{4} = 6$.

III. Natur der geometrischen Proportion.

§. 71.

Das Product der äußern Glieder ist, bey einer abgesonderten Proportion, dem Product der mittlern Glieder; bey einer stetigen Proportion aber, dem Quadrat des mittlern Gliedes gleich.

Denn bey der abgesonderten Proportion $a : ma = b : mb$ ist offenbar $amb = mab$, und bey der stetigen Proportion $a : ma = ma : m^2 a$ ist offenbar $m^2 a^2 = ma \,.\, ma = (ma)^2$.

§. 72.

Zwey gleiche Brüche, wie auch zwey gleiche Producte, geben eine Proportion.

Ist $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, so ist, wenn $\frac{b}{a} = m$, auch $\frac{d}{c} = m$, folglich $ma = b$ und $mc = d$. Nun ist $a : ma = c : mc$, folglich auch $a : b = c : d$.

Ist $ad = bc$, so ist auch $\frac{ad}{c} = b$, folglich $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$, folglich $a : b = c : d$. Eben so ist auch $\frac{ad}{b} = c$, folglich $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, folglich $b : a = d : c$.

§. 73.

Zwey Verhältnisse, die einer dritten gleich, sind selbst gleich.

Ist $a : b = m : n$, und $c : d = m : n$, so ist $\frac{b}{a} = \frac{n}{m}$ und $\frac{d}{c} = \frac{n}{m}$, folglich $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, folglich $a : b = c : d$.

§. 74.

Gleiche Größen A, B, haben zu einer dritten Größe C, und eine Größe C hat zu zwey gleichen Größen A, B, gleiche Verhältniß.

Da $A = B$, so ist $A.C = B.C$, folglich $A : C = B : C$. Eben so ist auch $\frac{A}{C} = \frac{B}{C}$, folglich $C : A = C : B$.

§. 75.

Haben zwey Größen A, B, zu einer dritten Größe C, oder hat eine Größe C zu zwey Größen A, B, gleiche Verhältniß: so sind die beyden Grössen A, B, einander gleich.

Denn da $A : C = B : C$, so ist $A.C = B.C$, folglich $A = B$; und da $C : A = C : B$, so ist $C.B = A.C$, folglich $B = A$.

§. 76.

In jeder Proportion ist das zweyte Glied kleiner, oder eben so groß, oder größer als das vierte Glied, je nachdem das erste Glied kleiner, oder eben so groß, oder größer als das dritte ist, und umgekehrt.

Es sey die Proportion $a : ma = b : mb$, worinn m der Verhältnißname. Ist nun $a < b$ so ist auch $ma < mb$; ist $a = b$, so ist auch $ma = mb$; ist $a > b$, so ist auch $ma > mb$. Und umgekehrt, ist $ma < mb$, so ist $a < b$; ist $ma = mb$, so ist $a = b$; ist $ma > mb$, so ist $a > b$.

§. 77.

Das vierte Glied einer abgesonderten Proportion findet man, wenn man das Product der mittlern Glieder mit dem ersten Gliede dividirt; das dritte Glied einer stetigen Proportion findet man, wenn man

man das Quadrat des mittlern Gliedes mit dem ersten Gliede dividirt.

Denn wenn man das Product der äußern Glieder amb mit dem ersten Gliede a dividirt, so erhält man offenbar mb, oder das vierte Glied; und wenn man das Quadrat des mittlern Gliedes m^2a^2 mit dem ersten Gliede a dividirt, so erhält man offenbar m^2a oder das dritte Glied.

§. 78.

Das mittlere Glied einer stetigen Proportion findet man, wenn man aus dem Producte der äußern Glieder die Quadratwurzel extrahirt.

Denn wenn man aus dem Producte der äußern Glieder m^2a^2 die Quadratwurzel extrahirt, so findet man offenbar ma oder das mittlere Glied.

§. 79.

Jede geometrische Proportion $a : ma = b : mb$ läßt sich auf mannigfaltige Art abändern, und zwar

1. durch Umkehrung der Glieder:

$ma : a = mb : b$, weil $\frac{a}{ma} = \frac{b}{mb} = \frac{1}{m}$.

2. Durch Versetzung der Glieder:

$a : b = ma : mb$, weil $\frac{b}{a} = \frac{mb}{ma}$.

3. Durch Addition der Glieder:

$a : ma + a = b : mb + b$, weil $\frac{ma + a}{a} = \frac{mb + b}{b} = m + 1$.

$a + ma : ma = b + mb : mb$, weil $\frac{ma}{a + ma} = \frac{mb}{b + mb} = \frac{m}{1 + m}$.

4. Durch Subtraction der Glieder:

$a : ma - a = b : mb - b$, weil $\frac{ma - a}{a} = \frac{mb - b}{b}$ $= m - 1$.

$ma - a : ma = mb - b : mb$, weil $\frac{ma}{ma - a} = \frac{mb}{mb - b} = \frac{m}{m - 1}$.

5. Durch Multiplication der Glieder:

$ac : mac = bd : mbd$, weil $\frac{mac}{ac} = \frac{mbd}{bd} = m$.

6. Durch Division der Glieder:

$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{b}{d} : \frac{mb}{d}$, weil $\frac{ma}{c} \cdot \frac{c}{a} = \frac{mb}{d} \cdot \frac{d}{b} = m$.

7. Durch Erhebung aller vier Glieder zu gleich hohen Potenzen:

$a^n : m^n a^n = b^n : m^n b^n$, weil $\frac{m^n a^n}{a^n} = \frac{m^n b^n}{b^n} = m^n$.

8. Durch Ausziehung gleichnamiger Wurzeln aus allen vier Gliedern:

$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{ma} = \sqrt[n]{b} : \sqrt[n]{mb}$, weil $\frac{\sqrt[n]{m}\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \frac{\sqrt[n]{m}\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{b}}$ $= \sqrt[n]{m}$.

IV. Zusammensetzung geometrischer Proportionen.

§. 80.

Sind zwey Proportionen von einerley oder verschiedenen Verhältnißnamen: so geben sie, wenn man die Glieder nach der Ordnung mit einander multi-

multiplicirt oder dividirt, eine zusammengesetzte Proportion.

Es sey $a : ma = b : mb$, und
$c : nc = d : nd$, so ist
$ac : mnac = bd : mnbd$, weil $\frac{mnac}{ac} = \frac{mnbd}{bd} = mn$.
$\frac{a}{c} : \frac{ma}{mc} = \frac{b}{d} : \frac{mb}{nd}$, weil $\frac{ma}{nc} \cdot \frac{c}{a} = \frac{mb}{nd} \cdot \frac{d}{b} = \frac{m}{n}$.

§. 81.

Sollen zwey Proportionen durch die Multiplication der Glieder zusammengesetzt werden, und es ist ein Hinterglied der einen einem Vordergliede der andern, oder die beyden Hinterglieder der einen den beyden Vordergliedern der andern, oder die mittlern Glieder der einen den äußern Gliedern der andern gleich: so können die gleichen Glieder bey der Zusammensetzung weggelassen werden.

Ist $a : b = g : h$ und
$c : d = h : q$, so ist
$ac : bd = gh : hq = g : q$.

Ist $a : b = c : d$, und
$b : f = d : h$, so ist
$a : f = c : h$, weil $ab : bf = a : f$, und $cd : dh = c : h$.

Ist $a : b = c : d$, und
$b : f = g : c$, so ist
$a : f = g : d$, weil $ab : bf = a : f$, und $cg : dc = g : d$.

§. 82.

Sind in zwey Proportionen die Hinterglieder der einen den Hintergliedern der andern, oder die mittlern Glieder der einen den mittlern Gliedern der andern gleich: so sind mit Weglassung der gleichen Glieder, im ersten Falle die Vorderglieder den Vorder-

gliedern proportionirt, im zweyten Falle aber die Vorderglieder den Hintergliedern umgekehrt proportionirt.

Es sey $a : b = c : d$, und
$f : b = h : d$, so ist
$a : f = c : h$, wie erhellet, wenn man die zweyte Proportion umkehrt.

Es sey $a : b = c : d$, und
$f : b = c : g$, so ist
$a : f = g : d$, wie gleichfalls aus Umkehrung der zweyten Proportion erhellet.

§. 83.

Werden bey zwey oder mehrern Verhältnissen die gleichnamigen Glieder mit einander multiplicirt: so sagt man, daß die Verhältniß solcher Producte aus den einzelnen Verhältnissen der Factoren oder aus andern jenen gleichen Verhältnissen zusammengesetzt sey.

So ist z. E. die Verhältniß $ace : bdf$ aus den Verhältnissen $a : b$, $c : d$, $e : f$, zusammengesetzt.
Oder wäre $a : b = m : n$
$c : d = p : q$
$e : f = r : s$
so wäre die Verhältniß $ace : bdf$ auch aus den Verhältnissen $m : n$, $p : q$, $r : s$ zusammengesetzt.

§. 84.

Wären daher diese oder jene einzelne Verhältnisse so beschaffen, daß immer das Hinterglied einer vorhergehenden das Vorderglied der nächst folgenden wäre: so wäre die Verhältniß des Vordergliedes der ersten zum Hintergliede der letzten aus den einzelnen Verhältnissen selbst, oder aus solchen, die ihnen gleich sind, zusammengesetzt.

Es

Es sey $a : b = m : n$
$c : d = n : p$
$e : f = p : q$, so ist
$ace : bdf = m : q$, das ist, die Verhältniß $m : q$ ist aus den Verhältnissen $m : n$, $n : p$, $p : q$, oder aus den Verhältnissen $a : b$, $c : d$, $e : f$, zusammengesetzt, oder ist der zusammengesetzten Verhältniß $ace : dbf$ gleich.

§. 85.

Wären im vorhergehenden Falle die einzelnen Verhältnisse, so viel ihrer sind, alle einander gleich, so nennte man die zusammengesetzte Verhältniß eine um so viel höhere Verhältniß als die Anzahl der einzelnen Verhältnisse beträgt.

Nach der Voraussetzung wäre also
$m : n = a : b$
$n : p = a : b$
$p : q = a : b$, folglich
$m : q = a^3 : b^3 = (a : b)^3 = (m : n)^3$, das heißt m ist zu q in einer dreymal höhern, oder in cubischer Verhältniß der a zu b, oder der m zu n.

§. 86.

Sind zwey Proportionen von einerley Verhältnißnamen: so geben sie, wenn man die Glieder nach der Ordnung addirt oder subtrahirt, eine neue Proportion.

Es sey $a : ma = b : mb$, und
$c : mc = d : md$, so ist
$(a \mp c) : (ma \mp mc) = (b \mp d) : (mb \mp md)$, das ist, $a \mp c : m (a \mp c) = (b \mp d) : m (b \mp d)$.

Ist daher $a : b = m : n$

$c : d = m : n$

$e : f = m : n$, so ist

$(a + c + e) : (b + d + f) = 3m : 3n = m : n.$

§. 87.

Sind zwey Proportionen von verschiedenen Verhältnißnamen, und die Vorderglieder den Vordergliedern proportionirt: so geben sie, wenn man die Glieder nach der Ordnung addirt, oder subtrahirt, eine neue Proportion.

Es sey $a : ma = b : mb$,

$c : nc = d : nd$,

und $a : c = b : d$, so ist

$a \mp c : ma \mp nc = b \mp d : mb \mp nd.$

Denn da $a : c = b : d$, so ist $\frac{c}{a} = \frac{d}{b} = p$, folglich $c = ap$ und $d = bp$. Demnach ist

$a : ma = b : mb$, und

$ap : nap = bp : nbp$, folglich

$(1 + p) a : (m + np) a = (1 + p) b : (m + np) b$, welches offenbar eine richtige Proportion ist.

V. Practische Rechnungsregeln.

§. 88.

Die *regula de tri*, oder de tribus terminis, ist nichts anders als die Aufgabe, zu drey gegebenen Gliedern einer geometrischen Proportion das vierte Glied zu finden. §. 77.

Man theilt sie in die gerade und verkehrte ein. Die gerade, oder regula de tri recta, entsteht, wenn eine Größe mit der andern in gleicher Verhältniß wächst oder abnimmt, als Waaren und ihre Preise. Die verkehrte, oder

oder regula de tri inversa, entsteht, wenn eine Größe in der Verhältniß abnimmt, in welcher die andre wächst, und umgekehrt, als die Zahl der Arbeiter und die Zeit der Arbeit.

Auch ist die Regel detri entweder einfach oder zusammengesetzt. Jene besteht aus einer einzelnen Proportion; diese ist eine aus mehrern einzelnen Proportionen zusammengesetzte Proportion, und heißt bey den Rechenmeistern regula quinque, regula septem, je nachdem sie aus zwey oder aus drey einzelnen Proportionen besteht. Ist nämlich $a : b = c : w$

$d : e = w : y$

$f : g = y : x$, so ist

$ad : bc = c : y$, regula quinque, und

$adf : beg = c : x$, regula septem.

Es wäre z. E. die Frage, in wie viel Wochen werden 16 Arbeiter einen Damm von 400 Fuß vollenden, wenn sie täglich 12 Stunden arbeiten; da 20 Arbeiter, die täglich 8 Stunden arbeiteten, einen Damm von 300 Fuß in 4 Wochen vollendet haben: so wären

16 A : 20 A = 4 W : w W.

300 F : 400 F = w W : y W.

12 St : 8 St = y W : x W. Folglich

$(16 \cdot 300 \cdot 12) : (20 \cdot 400 \cdot 8) = 4 : x$. Folglich

$x = \frac{20 \cdot 400 \cdot 8 \cdot 4}{16 \cdot 300 \cdot 12} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 8}{4 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{40}{9} = 4\frac{4}{9}$ W.

§. 89.

Die Kettenregel ist eine aus mehrern Verhältnissen zusammengesetzte Verhältniß. §. 83.

Sollte z. E. die Verhältniß eines Ducaten zu einem Groschen angegeben werden, so kann dies entweder durch eine einzige Verhältniß 66 : 1, oder durch mehrere Zwischenverhältnisse, als des Ducaten zum Thaler, des Tha-

lers zur Mark, der Mark zum Groschen, geschehen. So wäre

$$\left.\begin{array}{l} \text{Duc.} : \text{Thal.} = 11 : 4 \\ \text{Thal.} : \text{Mark} = 3 : 1 \\ \text{Mark} : \text{Gr.} = 8 : 1 \end{array}\right\} \text{folglich Duc} : \text{Gr.} = 66 : 1$$

oder kürzer

4 Duc = 11 Rthl.
1 Rthl = 3 Mark
1 Mark = 8 Grosch. Folglich
4 Duc = 264 Groschen, oder 1 Ducaten = 66 Grosch.

Wollte man hiernach wissen, wie viel 1000 Rthl. Preußisches Geld in holländischen Ducaten thäten, und man wüßte, daß der Cours gegen Gold 135 Procent wäre, das ist, daß 135 Rthl. Preuß. Geld 100 Rthl. holl. Courant machten; daß ferner 1 Rthl. holl. Courant $2\frac{1}{2}$ Fl. holl. Cour. oder 2 Rthl. holl. Courant 5 Fl. holl. Courant machte; daß endlich 1 Fl. = 20 Stüver, und 1 Duc = 5 Fl. 4 Stüver = 104 Stüver wäre: so setzte man

x Duc = 1000 Rthl. Pr. Gold
135 Rthl. Pr. G = 100 Rthl. holl. Cour.
2 Rthl. holl = 5 Fl. holl.
1 Fl. holl = 20 Stüver
104 Stüv = 1 Ducaten

Hebt man nun auf beyden Seiten durch gleiche Divisoren auf: so erhält man durch gehörige Multiplication $351 \cdot x = 125000$, folglich $x = \frac{125000}{351} = 356\frac{44}{351}$ Ducaten.

§. 90.

Die Reesische Regel ist eine besondre Methode, die Regel detri, besonders die zusammengesetzte, so anzusetzen, daß alle Factoren des Divisors mit der unbe-

unbekannten Größe auf die eine Seite, und die Factoren des Dividendus auf die andre Seite kommen.

Jedes Proportionsexempel nämlich besteht aus der Angabe und der Frage; beyde bestehen aus Verhältnissen, deren Glieder als Ursach und Wirkung angesehen werden können. Setzt man nun von der Frage die Ursach zur Linken und die Wirkung zur Rechten, so kommt bey der Angabe die Wirkung zur Linken und die Ursach zur Rechten, und so auch umgekehrt.

So ist z. E. in dem letztern Beyspiele §. 88. die Angabe, daß 20 Arbeiter, wenn sie 4 Wochen lang täglich 8 Stunden arbeiten, die Wirkung hervorbringen, daß sie einen Damm von 300 Fuß vollenden; die Frage aber, daß 16 Arbeiter, wenn sie x Wochen täglich 12 Stunden arbeiten, die Wirkung hervorbringen, daß sie einen Damm von 400 Fuß vollenden. Demnach ist der Ansatz des Exempels folgender:

x Wochen	
16 Arbeiter	400 Fuß
12 Stunden	
	20 Arbeiter
300 Fuß	4 Wochen
	8 Stunden.

Sind einige dieser Glieder Brüche, oder gemischte Zahlen, die man auf unächte Brüche reduciren muß; so versetze man die Nenner in die gegenseitige Kolumne. Denn werden die Glieder beyder Kolumnen mit einerley Zahl multiplicirt, so bleibt die Verhältniß ungeändert; dadurch aber wird der Nenner eines jeden Bruchs in die gegenseitige Kolumne versetzt, und man erhält lauter ganze Zahlen.

Wäre z. E. die Frage, wie viel ℔ ein 3 Gr. Brod wiegen müßte, bey einem Getreidepreiß von $32\frac{1}{2}$ Gr. wenn ein 2 Gr. Brod 6 ℔ wiegen muß, bey einem Getrei-

treidepreise von $20\frac{3}{4}$ Gr. so siehet man leicht ein, daß das Gewicht des Brodes und der Getreidepreiß, die Ursach von dem Brodpreise ist. Demnach wäre der Aufsatz dieser:

x ℔	3 Gr.
$\frac{65}{2} = 32\frac{1}{2}$ Gr.	
2 Gr.	6 ℔
	$20\frac{3}{4}$ Gr. $= \frac{83}{4}$
4	2

Sind die zusammengehörigen Glieder der Verhältnisse nicht von einerley Art, so reducire man sie durch die bekannten oder gegebenen Verhältnisse auf Dinge von einerley Art, indem man mittelst der Kettenregel diese Verhältnisse so ansetzt, daß immer einerley Größen auf verschiedne Seiten kommen.

Wäre z. E. die Aufgabe: Man braucht jährlich für ein Hauswesen von 10 Personen 50 Rthl. Pr. Courant an Brodkorn, wenn der Berliner Scheffel 1 Rthl. gilt; wie viel Rthlr. Cassengeld wird hiezu für 8 Personen nöthig seyn, wenn der Himten 18 Gr. kostet; so wird offenbar die jährliche Ausgabe durch die Anzahl der Personen und den Getreidepreiß bestimmt. Folglich ist der Ansatz:

x Rthlr. Cassengeld	8 Personen
	18 Gr. der Himten
10 Personen	50 Rthl. Pr. Courant
24 Gr. der Scheffel	
105 Rthlr. Pr. Courant	100 Rthl. Gold
15 Rthl. Gold	14 Rthl. Cassengeld
(3 Scheffel)	(5 Himten.)

An-

[illegible]

[illegible] vertauschen [illegible] kann.

§. 97.

[illegible]

Denn nach der Voraussetzung ist

$a : b = A : B$ und

$b : c = B : C$, folglich auch [illegible]

$a : A = b : B$ und

$b : B = c : C$, folglich auch

$b : C = c : A$ [illegible]

[illegible]

Anmerkung. Lassen sich die Glieder nicht gegen einander ohne Rest dividiren, so bringe man die Auflösung unter die allgemeine Form $x = a \cdot \frac{b}{m}$. Ist nun $\frac{b}{m}$ ein unächter Bruch, dessen Werth zwischen 1 und 2 liegt, so sey er $= 1 + \frac{n}{m}$. Demnach ist $x = a \cdot \frac{b}{m} = a\left(1 + \frac{n}{m}\right) = a + \frac{an}{m}$, welches oft mit Vortheil angebracht werden kann.

§. 91.

Die Gesellschaftsregel ist die Aufgabe, ein Ganzes in eine gegebene Anzahl von Theilen A, B, C, ꝛc. zu theilen, die sich wie gegebene Zahlen a, b, c, ꝛc. verhalten; da denn die Summe der gegebenen Verhältnißzahlen zu dem einzutheilenden Ganzen, wie jede Verhältnißzahl zu dem ihr zugehörigen Theile, oder $(a + b + c) : (A + B + C) = a : A = b : B = c : C$.

Denn nach der Voraussetzung ist

$a : b = A : B$ und
$b : c = B : C$, folglich verwechselt
$a : A = b : B$ und
$b : B = c : C$, folglich auch
$c : C = a : A$, folglich §. 86.

$(a + b + c) : (A + B + C) = a : A = b : B = c : C$, weil alle diese Verhältnisse einander gleich sind.

Diese

Diese Gesellschaftsregel wird verschiedentlich angewendet, und heißt nach Verschiedenheit dieser Anwendung Gewinnstrechnung, Verlust- oder Havereyrechnung, Repartitionsrechnung, Vermischungsrechnung, u. s. w.

Eine besondere Art der Vermischungsrechnung ist die Alligationsrechnung und die sogenannte *regula coeci*, die aber beyde zur Algebra gehören.

Vier-

Viertes Kapitel.

Von den Progreßionen.

I. Natur der arithmetischen Progreßion.

§. 92.

Eine Reihe Größen, worin jede drey unmittelbar auf einander folgende Glieder eine stetige arithmetische Proportion geben, machen eine arithmetische Progreßion oder Reihe, welche, wenn die Glieder wachsen, steigend, wenn sie abnehmen, fallend heißt.

Heißt daher das erste Glied a, und die Differenz d; so ist die allgemeine Form einer arithmetischen Reihe:

$$\overset{1}{a},\ \overset{2}{a+d},\ \overset{3}{a+2d},\ \overset{4}{a+3d},\ \overset{5}{a+4d},\ \overset{6}{a+5d},\ \overset{7}{d+6d} \ldots$$

worinn die Differenz d, für die steigende Reihe positiv, für die fallende negativ ist.

§. 93.

In jedem Gliede einer arithmetischen Reihe ist die Differenz so vielmal zum ersten Gliede addirt, als die Anzahl der Glieder, oder der Zeiger, weniger Eins beträgt.

Hält daher die Reihe n Glieder; so ist das letzte Glied, dessen Zeiger n ist, $a + (n - 1)\,d$; das vorletzte Glied, dessen Zeiger $n - 1$ ist, $a + (n - 2)\,d$ u. s. w. Vermehrte man die Reihe noch mit einem Gliede, dessen Zeiger also $n + 1$ ist; so wäre dieses Glied

a

$a + nd$ u. s. w. Hiedurch erhält man die nach allgemeiner Form:

$$\overset{1}{a},\ a \overset{2}{\pm} d,\ a \overset{3}{\pm} 2d \ldots a \overset{n-1}{\pm} (n-2)d,\ a \overset{n}{\pm} (n-1)d,\ a \overset{n+1}{\pm} nd \ldots$$

§. 94.

In jeder arithmetischen Reihe ist die Summe der äußersten Glieder der Summe jeder zwey von den äussersten gleich entfernten Glieder, wie auch, wenn die Anzahl der Glieder ungerade ist, dem mittelsten Gliede doppelt genommen, gleich.

Denn in der vorigen Reihe ist die Summe des ersten und letzten Gliedes $2a + nd$ gleich der Summe des dritten und des $n - 1$ Gliedes $2a + nd$, und so auch bey den übrigen.

Ist die Anzahl der Glieder ungerade, so würde das mittelste Glied von dem ersten so weit als von dem letzten abstehen, folglich doppelt genommen der Summe der äußersten Glieder gleich seyn.

§. 95.

Der Zeiger des letzten Gliedes einer ungeraden Reihe sey $2n + 1$, einer geraden $2n$; so ist das letzte Glied der ersten Reihe $a + 2nd$, der zweyten $a + (2n - 1)d$. Folglich ist die Summe der äußersten Glieder einer ungeraden Reihe $2a + 2nd$, also das mittelste Glied $a + nd$; und die Summe der äußersten Glieder einer geraden Reihe $2a + 2nd - d$, also die beyden mittlern Glieder $a + (n - 1)d$ und $a + nd$, folglich ihre Zeiger n und $n + 1$.

II. Summe einer arithmetischen Progreßion.

§. 96.

Die Summe aller Glieder einer arithmetischen Reihe ist dem Producte der halben Anzahl der Glieder

der

der in die Summe der äußersten Glieder gleich; oder $S = (a + z) \frac{m}{2} = (2a + \overline{m - 1} . d) \frac{m}{2}$.

Ist die Anzahl der Glieder gerade, oder $2n$, so sind halb so viel, also n Paare von Gliedern vorhanden, wovon jedes Paar der Summe der äußersten Glieder gleich ist. Diese Summe also $n$mal genommen, macht die Summe aller Paare, und daher der ganzen Reihe, aus.

Ist die Anzahl der Glieder ungerade, oder $2n + 1$, so sind ebenfalls n Paare nebst dem mittelsten Gliede, welches der halben Summe der äußersten Glieder gleich ist, vorhanden; folglich ist der Factor, statt des vorigen n, hier $n + \frac{1}{2} = \frac{2n + 1}{2}$.

Ist also das erste Glied a, das letzte z, die Zahl der Glieder m, die Summe S; so ist $S = (a + z) \frac{m}{2}$. Da aber $z = a + (m - 1) d$ ist, so ist auch $S = (2a + \overline{m - 1} . d) \frac{m}{2}$.

§. 97.

Polygonal, oder vieleckige, oder auch figurirte Zahlen, entstehen, wenn man die Glieder einer arithmetischen Reihe, welche sich mit der Einheit anfängt, summirt; und heißen, je nachdem die Differenz der Reihe 1, 2, 3 u. s. w. ist, drey, vier, fünfeckige Zahlen, so daß die Differenz der Reihe, woraus die Polygonalzahl entsteht, jedesmal um 2 Einheiten geringer ist, als die Zahl der Ecken, wornach die Polygonalzahl benannt wird. Der Zeiger, oder die Anzahl der Glieder einer solchen Reihe, deren Summe eine Polygonalzahl macht, heißt die Seite dieser Polygonalzahl.

§. 98.

Die allgemeine Form einer Polygonalzahl wird durch die allgemeine Form der Summe einer arithmetischen Reihe $(2a + \overline{m - 1} \,.\, d)\,\frac{m}{2} = ma + \frac{m(m-1)d}{2}$ §. 96. bestimmt.

Denn da für jede Polygonalzahl das erste Glied $a = 1$ und für ein n Eck die Differenz $d = n - 2$ §. 97. so erhält man, dies in vorige Form gesetzt, diese Form:

$$m + \frac{m(m-1)(n-2)}{2} = \frac{nm^2 - 2m^2 - nm + 4m}{2}$$

$$= \frac{(n-2)m^2 - (n-4)m}{2}.$$

Dies giebt z. E. für das Fünfeck, wo also $n = 5$, diese specielle Form: $\frac{(5-2)m^2 - (5-4)m}{2} = \frac{3m^2 - m}{2}$.

III. Natur der geometrischen Progreßion.

§. 99.

Eine Reihe Größen, worinn jede drey unmittelbar auf einander folgende Glieder eine stetige geometrische Proportion geben, machen eine geometrische Progreßion oder Reihe; welche, wenn die Glieder wachsen, steigend, wenn sie abnehmen, fallend heißt.

Ist daher das erste Glied a, und der Verhältnißname m; so ist die allgemeine Form einer geometrischen Reihe:

$$\overset{1}{a},\ \overset{2}{ma},\ \overset{3}{m^2a},\ \overset{4}{m^3a},\ \overset{5}{m^4a},\ \overset{6}{m^5a},\ \overset{7}{m^6a} \ldots.$$

worinn

worinn der Verhältnißname m, für die steigende Reihe eine ganze Zahl oder unächter Bruch, für die fallende aber ein ächter Bruch ist.

§. 100.

In jedem Gliede einer geometrischen Reihe ist das erste Glied mit einer Potenz des Verhältnißnamens multiplicirt, deren Exponent die Anzahl der Glieder, oder der Zeiger, weniger Eins ist.

Hat daher die Reihe n Glieder; so ist das letzte Glied, dessen Zeiger n ist, $a . m^{n-1}$ das vorletzte Glied, dessen Zeiger $n - 1$ ist, $a . m^{n-2}$ u. s. w. Vermehrte man die Reihe noch mit einem Gliede, dessen Zeiger also $n + 1$ ist; so wäre dieses Glied $a . m^n$ u. s. w. Hiedurch erhält man die noch allgemeinere Form:

$$\overset{1}{a}, \overset{2}{a . m}, \overset{3}{a . m^2}, \ldots\ldots \overset{n-1}{a . m^{n-2}}, \overset{n}{a^n . m^{n-1}}, \overset{n+1}{a . m^n} \ldots$$

Ist $a = 1$, so entsteht eine Reihe, deren erstes Glied die Einheit ist, und die übrigen Potenzen des Verhältnißnamens sind.

§. 101.

In jeder geometrischen Reihe ist das Product der äußersten Glieder dem Producte jeder zwey von den äußersten gleich entfernten Glieder, wie auch, wenn die Anzahl der Glieder ungerade ist, dem Quadrate des mittelsten Gliedes, gleich.

Denn in der vorigen Reihe ist das Product des ersten und letzten Gliedes $a^2 m^n$ gleich dem Producte des dritten und $n - 1$ Gliedes $a^2 m^n$, und so auch bey den übrigen.

Ist die Anzahl der Glieder ungerade, so würde das mittelste Glied von dem ersten so weit als von dem letzten abste-

abstehen, folglich sein Quadrat dem Producte der äußersten Glieder gleich seyn.

§. 102.

Der Zeiger des letzten Gliedes einer ungeraden Reihe sey $2n+1$, einer geraden $2n$; so ist das letzte Glied der ungeraden Reihe $a \cdot m^{2n}$, der geraden $a \cdot m^{2n-1}$. Folglich ist das Product der äußersten Glieder einer ungeraden Reihe $a^2 \cdot m^{2n}$, also das mittelste Glied $a \cdot m^n$; und das Product der äußersten Glieder einer geraden Reihe $a^2 \cdot m^{2n-1}$, also die beyden mittlern Glieder $a \cdot m^{n-1}$ und $a \cdot m^n$.

§. 103.

Eine geometrische Reihe wird interpolirt, wenn man zu jeden zwey unmittelbar auf einander folgenden Gliedern die mittlere Proportionalgröße sucht. §. 78. 14.

So verwandelt sich die Reihe a, ma, m^2a, m^3a durch das Interpoliren in diese:

$$a, \sqrt{(m \cdot a^2)}, ma, \sqrt{(m^3 a^2)}, m^2 a, \sqrt{(m^5 a^2)}, m^3 a$$

oder

$$a, \quad m^{\frac{1}{2}} a, \quad ma, \quad m^{\frac{3}{2}} a, \quad m^2 a, \quad m^{\frac{5}{2}} a, \quad m^3 a$$

worinn $m^{\frac{1}{2}}$ der Verhältnißname ist.

IV. Summe einer geometrischen Progreßion.

§. 104.

Die Form für die Summe aller Glieder einer geometrischen Reihe ist $S = \frac{m^n a - a}{m - 1} = \frac{mz - a}{m - 1}$.

Denn

Denn es ist offenbar solche Summe

$S = a + ma + m^2 a \ldots\ldots + m^{n-2} a + m^{n-1} a$, folglich, mit m multiplicirt,

$mS = ma + m^2 a + m^3 a \ldots + m^{n-1} a + m^n a$, folglich, erste Reihe subtrahirt,

$mS - S$ oder $(m-1) S = m^n a - a$, folglich, mit $m-1$ dividirt, $S = \frac{m^n a - a}{m-1}$.

Heißt das letzte Glied z, so ist $z = m^{n-1} a$ §. 100. folglich $mz = m^n a$, und, diesen Werth in vorige Form gesetzt, $S = \frac{mz - a}{m-1}$.

§. 105.

Ist die Reihe unendlich, und der Verhältnißname ein positiver ächter Bruch $\frac{b}{c}$, so ist die Summe aller Glieder $S = \frac{ac}{c-b}$.

Denn es ist offenbar solche Summe

$S = a + \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} \ldots$ infin. folglich, mit $\frac{b}{c}$ multiplicirt,

$\frac{b}{c} S = \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} \ldots$ infin. folglich, leztre Reihe subtrahirt,

$S - \frac{b}{c} S$ oder $\left(1 - \frac{b}{c}\right) S$ das ist $\frac{c-b}{c} . S = a$, folglich, mit $\frac{c-b}{c}$ dividirt, $S = \frac{ac}{c-b}$.

§. 106.

Ist die Reihe unendlich, und der Verhältnißname ein negativer ächter Bruch. $-\frac{b}{c}$, so ist die Summe aller Glieder $S = \frac{ac}{c+b}$.

Denn es ist offenbar solche Summe

$$S = a - \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} - \frac{ab^3}{c^3} \ldots \text{ infin.}$$

folglich, mit $-\frac{b}{c}$ multiplicirt,

$$-\frac{b}{c}S = -\frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} - \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} \ldots \text{ infin.}$$

folglich, letztre Reihe subtrahirt,

$$S + \frac{b}{c}S \text{ oder } \left(1 + \frac{b}{c}\right)S, \text{ das ist, } \frac{c+b}{c} \cdot S = a$$

folglich, mit $\frac{c+b}{c}$ dividirt,

$$S = \frac{ac}{c+b}.$$

§. 107.

Sind die Glieder einer unendlichen Reihe Potenzen des positiven oder negativen Bruchs $\frac{1}{a}$, so ist die Summe aller Glieder $S = \frac{1}{a \mp 1}$.

Denn es ist offenbar solche Summe

$$S = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} \ldots \text{ infin.}$$

folglich, mit $\frac{1}{a}$ multiplicirt,

$$\frac{1}{a}S = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} \ldots \text{ infin.}$$

folg-

folglich, letztre Reihe subtrahirt,

$S - \frac{1}{a} S$, oder $\left(1 - \frac{1}{a}\right) S$, das ist $\frac{a-1}{a} . S = \frac{1}{a}$

folglich, mit $\frac{a-1}{a}$ dividirt,

$S = \frac{1}{a-1}$.

Auf ähnliche Art wird bewiesen, wenn der Bruch $\frac{1}{a}$ negativ ist, daß alsdenn die Summe der Glieder $S = \frac{1}{a+1}$ sey.

Fünftes Kapitel.

Von den Logarithmen.

I. Natur der Logarithmen.

§. 108.

Erhebt man eine Größe a in ihre mannigfaltigen Potenzen, so heißen die Exponenten dieser Potenzen die Logarithmen der jedesmaligen daher entstehenden Zahlen, I. §. 43, und machen bey einem bestimmten Werthe solcher Größe a ein logarithmisches System aus. Der hiebey angenommene Werth gedachter Größe, heißt die Fundamentalgröße, Grundzahl, oder die Basis solches Systems.

Es sey $a^m = y$, und $a^n = z$, so ist m der Logarithmus von y, und n der Logarithmus von z, oder so ist $m = \log. y$ und $n = \log. z$. Jeder neue Werth der Größe a gäbe auch den Zahlen y, z u. s. w. einen neuen Werth, und machte also m, n u. s. w. zu Logarithmen von neuen Zahlen; daher auch ein neues System von Logarithmen entstehen würde. Bey den gemeinen Logarithmen setzt man $a = 10$; daher 10 die Basis des gemeinen Systems ist.

§. 109.

In jedem logarithmischen System findet man den Logarithmus eines Products, wenn man die Logarithmen der Factoren addirt; und den Logarithmus eines Bruchs, wenn man von dem Logarithmus des Zählers den Logarithmus des Nenners subtrahirt.

Es

Es sey $a^m = y$, und $a^n = z$, so ist §. 9. $a^{m+n} = y \cdot z$, folglich $m + n = \log. (y \cdot z)$; und $a^{m-n} = \frac{y}{z}$, folglich $m - n = \log. \frac{y}{z}$: da denn im ersten Falle m, n, die Logarithmen der Factoren sind, im zweyten aber m der Logarithmus des Zählers, n des Nenners ist, §. 108.

§. 110.

In jedem logarithmischen System ist der Logarithmus der Einheit Null; und der Logarithmus eines Bruchs, dessen Zähler die Einheit und der Nenner eine Potenz der Fundamentalgröße ist, der Exponent solcher Potenz negativ genommen.

Da $a^0 = 1$, so ist $\log. 1 = 0$. §. 108. Oder da $1 = \frac{y}{y} = \frac{a^m}{a^m}$, so ist $\log. 1 = \log. \frac{y}{y} = m - m = 0$. §. 109.

Da $\frac{1}{a^m} = \frac{a^0}{a^m} = a^{0-m} = a^{-m}$, so ist $-m$ der Logarithmus von $\frac{1}{a^m} = \frac{1}{y}$. §. 108. Oder da $\log. 1 = 0$, und $\log. a^m = m$ so ist $\log. \frac{1}{a^m} = 0 - m = -m$. §. 109.

§. 111.

In jedem logarithmischen System findet man den Logarithmus der Potenz einer Größe, wenn man den Logarithmus der Größe mit dem Exponenten der Potenz multiplicirt; und den Logarithmus der Wurzel einer Größe, wenn man den Logarithmus der Größe mit dem Exponenten der Wurzel dividirt.

Da $\log. c^2 = \log. (c \cdot c) = \log. c + \log. c = 2 \cdot \log. c$, auch $\log. c^3 = \log. (c^2 \cdot c^1) = 2 \log. c + \log. c = 3 \log. c$, u. s. w. so ist allgemein $\log. c^n = n \cdot \log. c$.

Da $\sqrt[n]{A} = A^{\frac{1}{n}}$, so ist log. $\sqrt[n]{A} = \frac{1}{n}$ log. $A = \frac{\text{log. } A}{n}$. Oder es sey $A = c^n$, so ist $\sqrt[n]{A} = c$, und log. $A = n$. log. $c = n$. log. $\sqrt[n]{A}$, folglich $\frac{\text{log. } A}{n} =$ log. $\sqrt[n]{A}$.

§. 112.

In dem gemeinen logarithmischen System enthält der Logarithmus der Einheit einer höhern oder niedrern Ordnung der Decadik so viel, im ersten Falle positive, im zweyten negative, Einheiten, als die Anzahl der jedesmaligen Ordnung beträgt.

Denn da in dem gemeinen System $a = 10$, so ist
log. 10^0 = log. 1 = 0
log. 10^1 = log. 10 = 1; log. $\frac{1}{10}$ = log. 0,1 = — 1
log. 10^2 = log. 100 = 2; log. $\frac{1}{10^2}$ = log. 0,01 = — 2
log. 10^3 = log. 1000 = 3; log. $\frac{1}{10^3}$ = log. 0,001 = — 3
log. 10^n = n; log. $\frac{1}{10^n}$ = — n

Zusatz. Hieraus erhellet 1) daß die Decimalbrüche mit den correspondirenden ganzen Decimalzahlen einerley Logarithmen haben, die nur durch das positive und negative unterschieden sind. 2) Daß der jedesmalige Logarithmus so viel Einheiten enthalte, als Nullen der zugehörigen Einheit vor- oder nachgehen; und daß umgekehrt der Einheit so viel Nullen vor- oder nachgehen müssen, als Einheiten der zugehörige Logarithmus enthält; nur daß bey positiven Logarithmen die Nullen der Einheit nachgehen, bey negativen aber vorgehen. So ist z. E. log. 1000000 = 6, und log. 0,000001 = — 6; umge-

umgekehrt aber 6 = log. 1000000, und — 6 = log. 0,000001.

§. 113.

In dem gemeinen logarithmischen System sind die Logarithmen aller Zahlen, welche zwischen die Einheiten zweyer unmittelbar auf einander folgender höherer oder niedrer Ordnungen fallen, Brüche, die sich mit der Zahl anfangen, welche der Logarithmus der Einheit der nächst vorhergehenden Ordnung ist, und die Kennziffer, oder Characteristik der Logarithmen genannt wird.

Da log. 1 = 0, und log. 10 = 1, so muß der Logarithmus jeder Zahl zwischen 1 und 10 größer als 0, und kleiner als 1, folglich ein Bruch von der Form 0, ... seyn, welcher also mit 0 anfängt, daher 0 die Characteristik für alle Zahlen von 1 bis 10 ist. Aus gleichem Grunde ist der Logarithmus jeder Zahl zwischen 10 und 100 größer als 1, und kleiner als 2, folglich ein Bruch von der Form 1, ... welcher also mit 1 anfängt, daher 1 die Characteristik für alle Zahlen von 10 bis 100 ist. Eben so ist 2 die Characteristik für alle Zahlen von 100 bis 1000 u. s. w.

Da log. $\frac{1}{10}$ = — 1, und log. $\frac{1}{100}$ = — 2, so muß der Logarithmus jeder Zahl zwischen $\frac{1}{10}$ und $\frac{1}{100}$ kleiner als — 1, und größer als — 2, folglich ein Bruch von der Form — 1, ... seyn, welcher sich mit — 1 anfängt, daher — 1 die Characteristik für alle Zahlen von $\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{100}$ ist, u. s. w. Oder, da die Decimalbrüche mit den ganzen Decimalzahlen einerley Logarithmen, aber negativ, haben, so haben solche Logarithmen auch einerley, aber negative, Kennziffern.

Zusatz. Hieraus erhellet 1) daß die Kennziffer des Logarithmus einer jeden decadischen Zahl sich nach dem

Range der höchsten Ziffer in dieser Zahl richte; und umgekehrt der Rang der höchsten Ziffer in einer decadischen Zahl nach der Kennziffer des zugehörigen Logarithmus bestimmt werde. — So ist z. E. weil die höchste Ziffer in der decadischen Zahl 5786,542 zur dritten höhern Ordnung gehört, 3 die Kennziffer des zugehörigen Logarithmus, und, weil die höchste Ziffer in der decadischen Zahl 0,00002647 zur fünften niedrern Ordnung gehört, — 5 die Kennziffer des zugehörigen Logarithmus. Gehörte umgekehrt zu einer decadischen Zahl 5786542 ein Logarithmus mit der Kennziffer + 4 oder — 4, so wäre die Zahl im ersten Falle 57865,42; im zweyten 0,0005786542.

2) Daß ein Logarithmus, der für eine Zahl gehöret, welche mit bestimmten Ziffern bezeichnet ist, auch für unzählig andre Zahlen gehöre, welche mit eben den Ziffern bezeichnet werden; nur daß seine Kennziffer geändert werde, je nachdem die höchste Ziffer in den andern Zahlen einen andern und andern Rang hat. So gehört für die Zahlen 3437; 343,7; 34,37; 3,437; 0,3437; 0,03437 u. s. w. einerley Logarithmus, nur daß seine Kennziffern nach der Ordnung 3, 2, 1, 0, — 1, — 2 u. s. w. sind. Und so auch umgekehrt.

§. 114.

In jedem logarithmischen System, dessen Basis a eine positive ganze Zahl ist, sind Logarithmen negativer Zahlen unmögliche oder eingebildete Größen.

Denn unter diesen Bedingungen ist es unmöglich, irgend einen Logarithmus z zu finden, so daß a^z eine negative Zahl werde; indem a^{+z} positive ganze oder gemischte Zahlen, und a^{-z} positive ächte Brüche, folglich niemals negative Zahlen giebt, in welchem Falle erst z der Logarithmus einer negativen Zahl wäre. §. 108.

Zusatz.

Zusatz. Kommen daher in Rechnungen negative Zahlen vor, deren Logarithmen gefodert werden, so sehe man sie so lange als positiv an, und bestimme nachher durch die Umstände der Sache, welches Zeichen die durch die Logarithmen gefundenen Zahlen haben müssen.

II. Die logarithmischen Tafeln.

§. 115.

Die Logarithmen der decadischen Zahlen findet man, wenn man durch das Interpoliren einer geometrischen Progreßion, deren Grundverhältniß 1 : 10 ist, die Logarithmen für die Primzahlen berechnet, und aus diesen die Logarithmen den zusammengesetzten Zahlen bestimmt.

Mittelst des fortgesetzten Interpolirens der Verhältniß 1 : 10. §. 103. findet man endlich zwey Zahlen, d, f mit ihren Logarithmen, woraus sich der Logarithmus der Zahl 5 ergiebt. Denn man findet zuletzt

$d = 5{,}000000145$; $\log. d = 0{,}6989700049$

$f = 4{,}9999999691$; $\log. f = 0{,}6989700012$

Da nun $d > 5$, und $f < 5$, die Logarithmen beyder Zahlen aber in den ersten acht Decimalstellen mit einander übereinkommen: so müssen eben diese Ziffern zugleich die ersten 8 Decimalstellen des Logarithmus der Zahl 5 seyn, oder es ist $\log. 5 = 0{,}69897000 \ldots$ In den gemeinen Tafeln begnügt man sich mit den ersten 7 Decimalstellen.

Aus log. 5. findet man $\log. 2 = \log. \frac{10}{5} = \log. 10 - \log. 5 = 0{,}3010300$; $\log. 4 = \log. 2^2 = 2. \log. 2 = 0{,}6020600$; $\log. 8 = \log. 4 . 2 = \log. 4 + \log. 2 = 0{,}9030900$.

Durch

Durch das fortgesetzte Interpoliren der Verhältniß 2 : 4 findet man auf gleiche Weise zwey Zahlen, zwischen denen die Zahl 3 ist, deren Logarithmen in so viel Decimalstellen übereinkommen, als man für den Logarithmus der Zahl 3 nöthig hat, und man erhält log. 3 = 0,4771212. Hieraus ergiebt sich zugleich log. 6 = l. 3. 2 = log. 3 + log. 2 = 0, 7781512, und log. 9 = $l. 3^2$ = 3. log. 3 = 0,9542424.

Auf eben die Art findet man durch das Interpoliren der Verhältniß 6 : 8 den Logarithmus der Zahl 7 = 0,8450980. Zwischen 10 und 20 sind nur für 11, 13, 17, 19, zwischen 20 und 30 nur für 23, 29 die Logarithmen auf solche Art zu suchen, u. s. w.

Nach dieser mühsamen Methode sind wirklich die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 100000 von Heinrich Brigg, Professor der Geometrie zu Oxford, und von Adrian Vlacq, einem holländischen Mathematicus in Goude, berechnet worden. Ersterer lieferte in seiner Arithmetica logarithmica 1624 die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 20000 und von 90000 bis 100000. Letztrer füllte in seiner Arithmetica logarithmica Briggii 1628 die gelassene Lücke mit den Logarithmen der Zahlen von 20000 bis 90000 aus, und gab darauf 1636 zu Goude in Octav die abgekürzten Tafeln heraus, welche nachher oft wieder aufgelegt und in Jedermanns Händen sind. Sie enthalten die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 10000 mit Weglassung der drey letzten Decimalstellen, (wofür, wenn sie über 550 betrugen, die Einheit zur siebenten Decimalstelle addirt ward. Die neuesten und besten Tafeln sind die Scherwinschen, London 1742. welche die Briggischen und Vlacqischen Logarithmen von 1 bis 101000 enthalten, und so bequem eingerichtet sind, daß man bey denselben vieler Rechnungen überhoben ist, welche die kleinern Tafeln oft erfodern.

Man

Man hat solche zu Avignon 1774 wieder aufgelegt, und dabey noch verschiedne neue Einrichtungen getroffen. Näher und wohlfeiler hat man solche, nebst vielen andern brauchbaren Tafeln in Joh. Carl Schulze Samlung mathematischer Tafeln, Berlin 1778. 4. und in Georg Vega logarithmische, trigonometrische und andere Tafeln. Wien 1783. 8. Letztrer zeigt zugleich sehr deutlich den Gebrauch solcher größern Tafeln; daher hier nur noch für den Gebrauch der kleinern das Nöthige zu lehren ist.

§. 116.

Die Differenzen solcher Zahlen, die über 1000 gehen und um Eins oder noch weniger unterschieden, sind den Differenzen ihrer Logarithmen, wenigstens bis zur siebenten Decimalstelle, ziemlich genau proportionirt; und zwar desto genauer, je weiter die Zahlen über 1000 gehen.

Denn so ist z. E. die Differenz

log. 1050	= 3,0211893	
		0,0004134
— 1051	= 3,0216027	
		0,0004130
— 1052	= 3,0220157	
		0,0004127
— 1053	= 3,0224284	
		0,0004122
— 1054	= 3,0228406	

Noch genauer ist z. E. die Differenz

log. 9995	= 3,9997828	
		0,0000434
— 9996	= 3,9998262	
		0,0000435
— 9997	= 3,9998697	
		0,0000434
— 9998	= 3,9999131	
		0,0000435
— 9999	= 3,9999566	

§. 117.

Der Logarithmus eines ächten Bruchs ist zwar an sich negativ; kann aber durch einen positiven Logarithmus

rithmus ausgedruckt werden, wenn man demselben die gehörige negative Kennziffer beyfügt. Ein dergestalt ausgedrückter Logarithmus erhält unzählige Formen, wenn man nach Belieben gleich viele Einheiten der positiven und negativen Kennziffer zusetzt, oder davon wegnimmt.

Es sey ein Decimalbruch 0,3567 gegeben, so ist §. 109. $\log. 0{,}3567 = \log. \frac{3567}{10000} = \log. 3567 - \log. 10000.$ Nun ist

$$\begin{array}{l} \log.\ 3567 = 3{,}5523031, \text{ davon subtrahirt} \\ \log.\ 10000 = 4{,}0000000 \\ \hline \log. 0{,}3567 = -0{,}4476969 \end{array}$$

Da aber die Tafeln keine negativen Logarithmen enthalten und nicht für Brüche berechnet sind; so pflegt man solche Subtraction nicht wirklich zu verrichten, sondern nur anzuzeigen, um jederzeit einen positiven Logarithmus zu erhalten. Hiernach wäre $\log.\ 0{,}3567 = 3{,}5523031 - 4 = 0{,}5523031 - 1 = 4{,}5523031 - 5$ u. s. w. welche Formen alle einerley Resultat geben.

Es sey nunmehr ein gemeiner Bruch $\frac{7}{135}$ gegeben, so ist $\log. \frac{7}{135} = \log.\ 7 - \log.\ 135$ ebenfalls negativ. Denn

$$\begin{array}{l} \log.\ 7 = 0{,}8450980 \\ \log.\ 135 = 2{,}1303338 \\ \hline \log. \frac{7}{135} = -1{,}2852358 \end{array}$$

Nun ist aber auch, nach dem Vorhergehenden

$$\begin{array}{l} \log.\ 7 = 2{,}8450980 - 2 \\ \log.\ 135 = 2{,}1303338 \\ \hline \log. \frac{7}{135} = 0{,}7147642 - 2 \end{array}$$

das heißt, $\log. \frac{7}{135} = 0{,}7147642 - 2{,}0000000 = -1{,}2852358$, welches mit Obigen einerley Resultat ist.

Der

Der hiedurch erhaltene positive Logarithmus mit beygefügter negativer Kennziffer läßt sich gleichfalls ohne Veränderung seines Werths auf mannichfaltige Art ausdrücken. Z. E. log. $\frac{7}{135}$ = 3,7147642 — 5 u. s. w.

§. 118.

Soll zu einer gegebenen Zahl, welche höchstens 4 Ziffern enthält, der Logarithmus gefunden werden: so nehme man den Logarithmus, der in den Tafeln bey solchen Ziffern stehet, und bestimme seine Charakteristik nach dem Range der höchsten Ziffer in der gegebenen Zahl. §. 113.

So ist z. E.

log. 4537 = 3,6567688
log. 4,537 = 0,6567688
log. 0,004537 = 0,6567688 — 3 u. s. w.

§. 119.

Soll zu einer gegebenen Zahl, welche über 4 Ziffern enthält, der Logarithmus gefunden werden: so sehe man die 4 ersten Ziffern als eine ganze Zahl, die übrigen aber als Decimaltheile an; subtrahire den Logarithmus der ganzen Zahl von dem nächstfolgenden Logarithmus; suche zur Einheit, zu den gegebenen Decimaltheilen, und zu der gefundenen Differenz die vierte geometrische Proportionalzahl, wegen §. 116; addire solche zu dem Logarithmus der ganzen Zahl, und bestimme endlich die Characteristik nach dem Range der höchsten Ziffer in der gegebenen Zahl. §. 113.

Es sey z. E. die Zahl 4738425 gegeben: so ist log. 4739 — log. 4738 = *,6756867 — *,6755951 = 916. Nun setze man 1 : 0,425 = 916 : x, so ist x = 389, welches

welches zum log. 4738 addirt giebt *,6756340. Demnach ist

log. 4738425 = 6,6756340
log. 47,38425 = 1,6756340
log. 0,4738425 = 0,6756340 — 1 u. s. w.

§. 120.

Soll zu einer gegebenen Zahl, welche einen angehängten Bruch hat, der Logarithmus gefunden werden: so verwandelt man entweder den angehängten Bruch in einen Decimalbruch, und sucht sodann den zugehörigen Logarithmus nach obigen Regeln; oder man bringt die gegebene gemischte Zahl auf einen unächten Bruch, und subtrahirt alsdann den Logarithmus des Nenners von dem Logarithmus des Zählers.

So ist z. E. log. $234\frac{3}{4}$ = log. 234,75 = 2,3706056; oder log. $234\frac{3}{4}$ = log. $\frac{939}{4}$ = log. 939 — log. 4 u. s. w.

§. 121.

Soll zu einem gegebenen positiven Logarithmus die zugehörige Zahl gefunden werden: so befindet sich solcher entweder genau in den Tafeln unter der Characteristik 3, oder nicht. Ist das erste, so ist die dabey stehende Zahl die gesuchte, wenn man ihrer höchsten Ziffer den Rang giebt, den die Characteristik des gegebnen Logarithmus erfodert. §. 113. Ist hingegen das letzte, so subtrahire man den nächst kleinern Logarithmus von dem gegebnen und von dem nächst grössern; suche zur gefundenen zweyten Differenz, zur Einheit und zur ersten Differenz die vierte geometrische Proportionalzahl; füge solche der dem nächst kleinern Logarithmus zugehörigen Zahl bey: so ist nunmehr diese Zahl die gesuchte, wenn man den Rang ihrer

ihrer höchsten Ziffer nach der Characteristik des gegebnen Logarithmus bestimmt. §. 113.

So ist z. E. 3,8741918 = log. 7485, und 1,8741918 = log. 74,85, und 6,8741918 = log. 7485000 u. s. w. Eben so ist 0,8741918 — 5 = log. 0,00007485 u. s. w.

Wäre der gegebne Logarithmus *, 5639462 nicht genau in den Tafeln unter der Characteristik 3, so giebt der zunächst kleinere Logarithmus der Zahl 3663 von dem gegebnen subtrahirt, ohne auf die Characteristik zu sehen, die erste Differenz 1093, und von dem zunächst größern log. 3664 subtrahirt die zweyte Differenz 1186. Setzt man nun 1186 : 1 = 1093 : x, so ist x = 0,922, welches der Zahl 3663 beygefügt die gesuchte Zahl 3663922 giebt, wenn man den Rang ihrer höchsten Ziffer nach der Characteristik des gegebnen Logarithmus bestimmt. So ist z. E. 4,5639462 = log. 36639, 22 und 0,5639462 — 4 = log. 0,0003663922, u. s. w.

§. 122.

Soll zu einem gegebenen negativen Logarithmus die zugehörige Zahl gefunden werden: so ist solche ein Bruch, dessen Zähler die Einheit, der Nenner aber die dem gegebnen Logarithmus, als positiv angesehen, zugehörige Zahl ist. Doch kann man die verlangte Zahl auch in Form eines Decimalbruchs haben, wenn man durch gehörige Veränderung der Characteristik den gegebnen negativen Logarithmus in einen positiven verwandelt §. 117, und die dazu gehörige Zahl nach der vorigen Regel aufsucht.

So ist z. E. — 3,6253124 = log. $\frac{1}{4220}$ und — 4,2533380 = log. $\frac{1}{17920}$ u. s. w.

Eben so ist auch $-3{,}6253124 = \overset{+4,}{-}\,3{,}6253124 - 4 = (+4{,}0000000 - 3{,}6253124) - 4 = 0{,}3746876 - 4 =$ log. $0{,}0002369661 =$ log. $\frac{1}{4220}$. u. s. w.

III. Gebrauch der Logarithmen.

§. 123.

Mittelst der Logarithmen verwandelt sich die Multiplication in eine Addition; die Division in eine Subtraction, das Potenziren in ein Multipliciren; und das Extrahiren in ein Dividiren.

Der Grund des Verfahrens erhellet aus dem Vorhergehenden, und die Art der Operation hat keine Schwierigkeiten. Sollen nemlich zwey Zahlen in einander multiplicirt werden, so addire man die Logarithmen der Zahlen; sollen zwey Zahlen in einander dividirt werden, so subtrahire man den Logarithmus des Divisors vom Logarithmus des Dividendus; soll eine Zahl zu einer Potenz erhoben werden, so multiplicire man den Logarithmus der Zahl mit dem gegebenen Exponenten der Potenz; soll aus einer Zahl eine Wurzel gezogen werden, so dividire man den Logarithmus der Zahl mit dem gegebenen Exponenten der Wurzel. In allen Fällen suche man in den Tafeln zu dem berechneten Logarithmus die ihm zugehörige Zahl auf die vorgeschriebne Art.

Zusatz. Findet es sich, daß beym Extrahiren die Division des Logarithmus mit dem gegebnen Exponenten der Wurzel sich nicht verrichten läßt: so richte man die Kennziffer nach §. 117. dazu gehörig ein. So ist z. E. log. $\sqrt[3]{\tfrac{5}{144}} =$ log. $\sqrt[3]{}\,0{,}5406075 - 2 = \frac{0{,}5406075 - 2}{3} = \frac{1{,}5406075 - 3}{3} = 0{,}5135358 - 1$. Eben so ist

log.

log. $\sqrt[7]{\frac{5}{144}} = \frac{0,5406075 - 2}{7} = \frac{5,5406075 - 7}{7} =$ 0,7915153 — 1.

§. 124.

Aufgabe: Die Summe aller Weitzenkörner zu berechnen, welche sich der Erfinder des Schachspiels zur Belohnung ausbath, und womit das Schachbret so belegt werden sollte, daß auf das erste Feld 1 Stück und auf jedes der folgenden jedesmal doppelt so viel, als auf das nächstvorhergehende, gelegt würden.

Man erhält hiedurch eine geometrische Progreßion von 64 Gliedern, deren erstes Glied 1, Verhältnißname 2, letztes Glied also 2^{63} ist, §. 100. Nun ist §. 104. $S = \frac{mz - a}{m - 1} = \frac{2 \cdot 2^{63} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1$. Demnach beruhet die Auflösung darauf, daß man den Werth von 2^{64} finde.

Es ist aber §. 13. $(2^2)^2 = 2^4$; $(2^4)^2 = 2^8$; $(2^8)^2 = 2^{16}$; $(2^{16})^2 = 2^{32}$; und $(2^{32})^2 = 2^{64}$. Man berechne daher nach und nach von jeder dieser Größen 2^2, 2^4, 2^8, 2^{16}, 2^{32}, die Quadratzahl: so erhält man die Summe der Körner $= 2^{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616$.

Mittelst der logarithmischen Rechnung §. 111. ist log. $2^{64} = 64$. log. $2 = 19,2659200$, wozu man nach §. 121. die Zahl 18 446 740 000 000 000 000 findet.

Wenn nun nach Wallis 7680 Weitzenkörner auf 1 ℔ gehen, und 80 ℔ einen Berliner Scheffel geben; so setze man §. 90.

x Wisp	2^{64} Körner
7680 Körner	1 ℔
80 ℔	1 Scheffel
24 Scheffel	1 Wispel.

Folglich $x = \frac{2^{64}}{14745600}$; daher $\log. x = 64. \log. 2 - \log. 14745600.$

§. 125.

Aufgabe: Die Größe eines Capitals a nach n Jahren zu finden, wenn die jährigen Zinsen $\frac{q}{r}$ alle Jahr dazu geschlagen werden.

Nach dem ersten Jahre ist das Capital =

$$a + \frac{q}{r}\,a = \left(1 + \frac{q}{r}\right) a = \left(\frac{r+q}{r}\right) a = A$$

folglich nach dem zweyten Jahre

$$\frac{r+q}{r}\,A = \frac{r+q}{r} \cdot \frac{r+q}{r}\,a = \left(\frac{r+q}{r}\right)^2 . a = B$$

folglich nach dem dritten Jahre

$$\frac{r+q}{r}\,B = \frac{r+q}{r} . \left(\frac{r+q}{r}\right)^2 . a = \left(\frac{r+q}{r}\right)^3 . a = C$$

folglich nach dem vierten Jahre

$$\frac{r+q}{r} . C = \frac{r+q}{r} . \left(\frac{r+q}{r}\right)^3 . a = \left(\frac{r+q}{r}\right)^4 a$$

also nach dem n. Jahre

$$\frac{r+q}{r} . \left(\frac{r+q}{r}\right)^{n-1} . a = \left(\frac{r+q}{r}\right)^n . a.$$

Es sey z. E. einem Rechnungsbeamten, welcher bey 5 Procent ein Capital von 10000 Rthlr. 20 Jahr lang zu verwalten gehabt, die Rechnung abzunehmen: wie viel wird er an Capital gewähren müssen? Hier ist

$a = 10000$, $n = 20$, $\frac{q}{r} = \frac{1}{20}$, folglich $\left(\frac{r+q}{r}\right)^n \cdot a = \left(\frac{21}{20}\right)^{20} \cdot 10000 = C$. Demnach ist

$$\begin{array}{rl} \log. 21 = & 1,3222193 \\ - \log. 20 = & 1,3010300 \\ \hline & 0,0211893 \\ & 20 \\ \hline & 0,4237860 \\ + \log. 10000 = & 4,0000000 \\ \hline & 4,4237860 = \log. C. \end{array}$$

§. 126.

Aufgabe: Den gegenwärtigen Werth x eines Capitals a zu finden, wenn solches erst nach n Jahren zahlbar wäre.

Hier muß nothwendig x so groß seyn, daß, wenn man es wie in der vorigen Aufgabe anlegt, es nach n Jahren dem Capital a gleich wird. Demnach ist §. 125. $\left(\frac{r+q}{r}\right)^n \cdot x = a$, folglich $x = a \cdot \left(\frac{r}{r+q}\right)^n$.

Wären z. E. 10000 Rthlr. nach 20 Jahren auszuzahlen, und man wollte sie schon in der Hälfte der Zeit haben: so wäre $x = \left(\frac{20}{21}\right)^{10} \cdot 10000$, folglich $\log. x = 10. \log. \frac{20}{21} + \log. 10000$.

§. 127.

Aufgabe: Den Zustand eines Vermögens a nach n Jahren zu finden, wenn die jährigen Zinsen $\frac{q}{r}$ dazu geschlagen, aber zugleich eine bestimmte Summe b jährlich davon genommen wird.

Nach dem ersten Jahre ist das Capital

$$\frac{q+r}{r} \cdot a - b = A$$

nach dem zweyten Jahre

$$\frac{q+r}{r} \cdot A - b = \left(\frac{q+r}{r}\right)^2 a - \frac{q+r}{r} \cdot b - b = B$$

nach dem dritten Jahre

$$\frac{q+r}{r} \cdot B - b = \left(\frac{q+r}{r}\right)^3 a - \left(\frac{q+r}{r}\right)^2 b - \frac{q+r}{r} \cdot b - b = C$$

nach dem vierten Jahre

$$\frac{q+r}{r} \cdot C - b = \left(\frac{q+r}{r}\right)^4 a - \left(\frac{q+r}{r}\right)^3 b - \left(\frac{q+r}{r}\right)^2 \cdot b - \frac{q+r}{r} \cdot b - b$$

nach dem n. Jahre also

$$\left(\frac{q+r}{r}\right)^n a - \left(\frac{q+r}{r}\right)^{n-1} b - \left(\frac{q+r}{r}\right)^{n-2} b \ldots\ldots - \frac{q+r}{r} \cdot b - b.$$

Demnach findet man das Vermögen nach n Jahren, wenn man von $\left(\frac{q+r}{r}\right)^n a$, die Summe S einer geometrischen Reihe subtrahirt, deren erstes Glied b, Verhältnißname $\frac{q+r}{r}$, und Anzahl der Glieder n ist. Nun ist

§. 104. $S = \frac{m^n a - a}{m - 1} = \frac{\left(\frac{q+r}{r}\right)^n b - b}{\frac{q+r}{r} - 1} = \frac{\left(\frac{q+r}{r}\right)^n b - b}{\frac{q+r-r}{r}} = \frac{\left(\frac{q+r}{r}\right)^n \cdot rb - rb}{q}$. Folglich ist, wenn $\frac{q}{r} = \frac{1}{20}$, das Vermögen nach n Jahren $= \left(\frac{21}{20}\right)^n \cdot a - \left(\frac{21}{20}\right)^n \cdot 20b + 20b = \left(\frac{21}{20}\right)^n \cdot \overline{a - 20b} + 20b$. Ist nun $b > \frac{1}{20} a$, folglich $20b > a$, so ist $a - 20b = -(20b - a)$ folglich das

das Vermögen $= 20\,b - (\frac{21}{20})^n \,.\, \overline{20\,b - a}$. Sollte das Vermögen alsdenn ganz verzehrt, das ist, $= 0$ seyn: so ist $20\,b - (\frac{21}{20})^n \,.\, \overline{20\,b - a} = 0$, das ist $20\,b = (\frac{21}{20})^n \,.\, \overline{20\,b - a}$.

§. 128.

Aufgabe: Da eine Zeitrente eine bestimmte Summe ist, welche, da sie die jährlichen Zinsen eines Capitals übersteigt, man jährlich so lange ziehet, bis Capital und Zinsen gänzlich verzehret sind; so entsteht die Frage:

1) Auf wie viel Jahre n kann man die Rente b von dem Capital a ziehen?

Die letzte Formel §. 127. giebt $\frac{20\,b}{20\,b - a} = (\frac{21}{20})^n$ folglich $\log. \frac{20\,b}{20\,b - a} = n \,.\, \log. \frac{21}{20}$, folglich $\log. \frac{20\,b}{20\,b - a} : \log. \frac{21}{20} = n$.

2) Wie groß muß das Capital a seyn, um die Rente b auf n Jahre zu ziehen?

Die letzte Formel §. 127. giebt $(\frac{21}{20})^n \,.\, a = (\frac{21}{20})^n \,.\, 20 \,.\, b - 20 \,.\, b$, folglich, wenn man beyderseits mit $(\frac{21}{20})^n$ dividirt, $a = 20\,b - \frac{20^n \,.\, 20\,b}{21^n}$. Sucht man daher von der letzten Größe den Logarithmus und die hiezu gehörige Zahl, und subtrahirt dieselbe von $20\,b$, so findet man a.

3) Wie groß ist die Rente b auf n Jahr von einem Capital a?

Die eben gefundene Formel $a = \left(20 - \frac{20^n - 20}{21^n}\right) b$, giebt $a : \left(20 - \frac{20^n \cdot 20}{21^n}\right) = b$. Sucht man daher von $\frac{20^n \cdot 20}{21^n}$ den Logarithmus und die hiezu gehörige Zahl, subtrahirt dieselbe von 20, und dividirt die Differenz in a, so findet man b.

Anmerkung. Immerwährende Renten sind die Zinsen, die man jährlich vom Capitale zieht. Eine Zeitrente ist eine bestimmte jährliche Summe, welche die jährigen Zinsen übersteigt, und so lange dauert, bis das Capital verzehrt ist. Eine Leibrente hört mit dem Tode des Käufers auf, und wird nach der Formel für die Zeitrente berechnet, wenn man darinn n nach der Wahrscheinlichkeit des Lebens ansetzt. Eine Tontine ist eine Art von Leibrente, nur daß die Theilnehmer von einander erben, und die Portion des Verstorbnen unter die Lebenden vertheilt wird, bis die Societät ausgestorben ist. Sie hat ihren Namen von einem Neapolitaner Lorenz Tontin, der sie in Frankreich angegeben hat. Die erste fieng sich 1689 an, und jede Actie kostete 300 Livres. Für diese erhielt eine Barbierwittwe, die 96 Jahr alt ward, zuletzt eine Rente von 73500 Livres.

§. 129.

Aufgabe: Den Zustand einer anfänglichen Größe C nach n Jahren zu finden, wenn sich solche jährlich nach der bestimmten Verhältniß $m : r$ vermehrt, und zugleich nach der bestimmten Verhältniß $m : s$ vermindert.

Im

Im ersten Jahre ist die Vermehrung $m : r = C : \frac{r}{m} . C$, und die Verminderung $m : s = C : \frac{s}{m} . C$; folglich die gänzliche Aenderung $\frac{r}{m} C - \frac{s}{m} . C = \frac{r-s}{m} . C$. Wird diese Aenderung nun zu der Größe C geschlagen: so ist ihr Zustand am Ende des ersten Jahres $C + \frac{r-s}{m} . C = \left(1 + \frac{r-s}{m}\right) C = \frac{m+r-s}{m} . C = P$.

Am Ende des zweyten Jahres ist aus eben dem Grunde aus P geworden $\frac{m+r-s}{m} . P$, oder statt P das vorige gesetzt $\frac{m+r-s}{m} . \frac{m+r-s}{m} . C = \left(\frac{m+r-s}{m}\right)^2 . C = Q$.

Am Ende des dritten Jahres ist aus Q geworden $\frac{m+r-s}{m} . Q$, und statt Q das vorige gesetzt $\left(\frac{m+r-s}{m}\right)^3 . C$.

Am Ende des *n*ten Jahres ist demnach ihr Zustand $\left(\frac{m+r-s}{m}\right)^n . C = x$.

Sollte kein Abnehmen statt finden, so wäre $s = 0$, und die Formel $x = \left(\frac{m+r}{m}\right)^n . C$.

Wäre z. E. die anfängliche Volksmenge an einem Orte, $C = 10000$; die Verhältniß der jetzt Lebenden zu den jährlich Gebohrnen $m : r = 250 : 10$; die Verhältniß der jetzt Lebenden zu den jährlich Gestorbenen $m : s = 250 : 7$; und $n = 50$ Jahr: so ist nach 50 Jahren die Volksmenge

$$x = \left(\frac{250 + 10 - 7}{250}\right)^{50} . 10000 = \left(\tfrac{253}{250}\right)^{50} . 10000.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} 50 \log. \tfrac{253}{250} &= 0{,}2590250 \\ + \log. 10000 &= 4{,}0000000 \end{aligned}$$

folglich $x = 18151$.

Zwey=

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Lorenz, Johann Friedrich, 1738-1807

Die Elemente der Mathematik in sechs Büchern in 6 Büchern mit 1 Anhange

Bd.: Erster Theil

Leipzig 1785

Math.u. 110-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594092-9
VD18 14496208-001